

人工冻土分数阶导数应力-应变指数模型参数确定及验证

姚兆明^{1,2}, 宋梓豪^{1,2}, 陈军浩^{2,3}, 左维亚^{1,2}

(1. 安徽理工大学 土木建筑学院, 安徽 淮南 232001; 2. 矿山地下工程教育部工程研究中心, 安徽 淮南 232001; 3. 福建工程学院 土木工程学院, 福建 福州 350108)

摘要:人工冻土可看成是理想固体和理想流体以某种比例进行的勾兑, 其力学特性既不符合胡克定律, 也不遵守牛顿黏性定律, 而是遵守介于它们之间的某种关系, 分数阶导数能够很好地描述这种勾兑效应。对合肥膨胀土在不同冻结温度下进行单轴压缩试验, 得到冻结温度对应力-应变的影响规律。将分数阶导数引入指数模型, 将它改进为人工冻土单轴压缩下应力-应变分数阶指数模型。通过对建立的模型两边取自然对数, 得到不同温度下应力-应变线性方程组, 求解建立方程组确定出分数阶导数模型参数。为进一步验证所建立模型的适用性, 引用一组南京冻结粉质黏土三轴剪切试验, 在分数阶系数中考虑围压的影响, 将它改进为能考虑围压影响的应力-应变分数阶指数模型。将改进的人工冻土应力-应变分数阶指数模型的计算结果与试验结果进行比较, 结果表明: 计算结果与试验结果吻合度较高, 能准确地预测单轴压缩、三轴压缩剪切应力-应变曲线的变化趋势。改进后的分数阶导数模型参数较少且有明确的物理意义, 便于工程应用。当前的模型仅仅适用于应变硬化型, 为了能进一步描述应变软化型的力学特性, 下一步将在模型中考虑损伤进而建立应变软化型分数阶指数模型。同时, 如何在模型中反映冻土的结构性与各向异性对应力-应变的影响也将是下一步的研究内容。

关键词:人工冻土; 指数模型; 应力-应变曲线; 分数阶导数

中图分类号: TU445 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-9993(2024)S1-0285-10

Strain hardening index model of artificial frozen soil based on fractional derivative

YAO Zhaoming^{1,2}, SONG Zihao^{1,2}, CHEN Junhao^{2,3}, ZUO Weiya^{1,2}

(1. College of Civil Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China; 2. Engineering Research Center of Underground Mine Construction, Ministry of Education, Huainan 232001, China; 3. School of Civil Engineering, Fujian University of Technology, Fuzhou 350108, China)

Abstract: Artificial frozen soil can be regarded as the blending of ideal solid and ideal fluid in a certain proportion. Its mechanical properties neither comply with the Hooke's law nor the Newton's viscosity law, but obey certain relationship between them. Fractional derivative can well describe this blending phenomenon. Uniaxial compression tests were performed on the expansive soils of Hefei under different freezing temperatures, and the influence law of freezing temperature on stress and strain were obtained. The fractional derivative was introduced into the exponential model, and the improved exponential model was the fractional exponential model of stress-strain under uniaxial compression of artificial

收稿日期: 2022-07-28 修回日期: 2022-12-27 责任编辑: 王晓珍 DOI: 10.13225/j.cnki.jccs.2022.1113

基金项目: 矿山地下工程教育部工程研究中心开放研究资助项目 (JYBGZX2021104)

作者简介: 姚兆明 (1975—), 男, 安徽黄山人, 教授, 博士。E-mail: zhmyaoaust@126.com

引用格式: 姚兆明, 宋梓豪, 陈军浩, 等. 人工冻土分数阶导数应力-应变指数模型参数确定及验证[J]. 煤炭学报, 2024, 49(S1): 285-294.

YAO Zhaoming, SONG Zihao, CHEN Junhao, et al. Strain hardening index model of artificial frozen soil based on fractional derivative[J]. Journal of China Coal Society, 2024, 49(S1): 285-294.



移动阅读

frozen soil. By taking natural logarithms on both sides of the improved model, the stress-strain linear equations at different temperatures were obtained, and the fractional derivative model parameters were determined by solving the established equations. To further verify the applicability of the established model, a set of triaxial shear tests of frozen silty clay in Nanjing were quoted and the influence of confining pressure was taken into account in the fractional order coefficient. The stress-strain fractional order exponential model was improved to take the influence of confining pressure into account. Comparing the calculated results of the improved stress strain exponential equation of artificial frozen soil with the experimental results, the results show that the calculated results are in good agreement with the experimental results and can accurately predict the changing trend of the shear stress strain curves under uniaxial compression and triaxial compression. The improved fractional derivative model has few parameters and definite physical meaning, which is convenient for engineering application. The current model is only applicable to the strain hardening type. In order to further describe the mechanical properties of the strain softening type, the further study is to establish a fractional exponential model of the strain softening type by considering the damage in the model. At the same time, how to reflect the influence of the structure and anisotropy of frozen soil on the stress-strain in the model will also be investigated.

Key words: artificial frozen soil; index model; stress-strain curve; fractional derivative

人工冻结法被广泛地应用于地铁隧道、矿山矿井、深基坑等各种工程建设中,研究土体在冻结状态下的力学特性是解决冻结壁设计等工程的关键问题之一。由于岩土有着复杂的物理力学性质,因此发展能够反映岩土应力-应变特性的本构理论显得格外重要。元件模型通过串联或并联模型原件来模拟岩土应力-应变关系及蠕变特性,具有概念直观、物理意义明确等优点,但模型参数较多,求取困难。经验型模型通过试验结果来建立岩土本构关系,其优点在于参数少,可合理描述岩土的蠕变特性,工程应用价值较高,但其参数大多通过拟合得出,缺少物理意义^[1],常见的有幂函数模型和对数函数模型,蠕变模型中的 Singh-Mitchell 模型与 Mesri 模型就是基于三轴蠕变试验提出的。弹性模型形式简单、参数少、物理意义明确,但常用的 Duncan-Chang 双曲线模型等不能很好地反映土体三轴剪切过程中的应力-应变特性。诸多学者为了研究土体应力-应变特性还提出了指数模型、复合指数模型、复合指数-双曲线模型^[2]、复合幂-指数模型^[3]、黏弹塑性模型^[4]等本构模型。

分数阶微积分是微积分理论的一个分支,研究函数任意阶次的微分、积分算子特性,常应用于数学和力学建模等领域。与整数阶微积分相比,分数阶微积分具有全局关联度好、试验结果和理论模拟值吻合度高等优点。近年来,分数阶理论被广泛地应用于岩土工程领域以描述不同类型岩土材料的力学特性。殷德顺等^[5]通过将金属塑性拉伸变形的经验方程^[6]引入到岩土中,在分数阶导数的基础上提出了岩土应变硬化指数理论,获得了能够反映岩土应变硬化特性的参数;陈晨等^[7]建立了一种适用于砂土三轴压缩和拉伸行为的分数阶塑性力学模型,可以对砂土在不同初始

状态和加载条件下的应力-应变特性进行预测;孙逸飞等^[8]通过分数阶塑性模型合理地描述了砂土在不同初始状态及加载条件下的应力-应变行为;李海潮等^[9]建立了基于分数阶热弹塑性理论的软岩分数阶下加载面模型,并合理地反映了温度对软岩力学特性的影响;SUN 等^[10-12]通过 Caputo 分数阶微分方法得到分数阶流动法则,并提出了相应的分数阶塑性模型,此外,SUN 等^[13-14]在分数导数定义中使用当前应力状态来模拟颗粒土的状态相关行为;LU 等^[15]基于协变变换提出了一种新的三维分数塑性流动规则,首次建立了土体的三维分数弹塑性模型,该模型参数少、物理意义明确,能够描述土体在三维应力条件下的强度和变形特性;QU 等^[16]将分数阶微积分代入弹塑性本构模型,通过分数阶导数来描述岩石从压缩到膨胀的体积过渡过程,模型公式更加简洁、参数物理意义明确。

笔者通过对合肥膨胀土进行冻土单轴压缩强度试验^[17]以及引用多组单轴、三轴力学试验数据,着重对冻土的应力-应变关系进行分析,考虑冻结温度对应力-应变关系的影响,探究其变化规律,将分数阶导数引入指数模型,改进为人工冻土应力-应变分数阶指数模型,旨在获得能够描述冻土应变硬化能力的参数,为工程设计提供参考。

1 人工冻结膨胀土单轴压缩试验

将合肥地区的膨胀土土样放入烘干箱中进行烘干,接着取出土样至干燥器中冷却至室温并进行碾碎和过筛,最后将筛后的土样按比例加入蒸馏水配置含水率为 20% 的重塑土样。试验使用高 100 mm、直径 50 mm 的钢制模具制备土样(图 1),制样前在模具内

壁涂抹凡士林,以减少拆模时的摩擦力。制样完备后,将脱模后的土样放入恒温箱中养护 24 h 以上,以防止其水分的流失。土样的基本物理参数见表 1。



图 1 模具中的土样

Fig.1 Mold with sample

表 1 基本物理参数

Table 1 Basic physical parameters %

土壤类别	含水率	液限	塑限	塑性指数	自由膨胀率
弱膨胀土	20	45.13	22.34	22.79	49.57

将含水率为 20% 的重塑土样 (图 2) 分别在 -5、-10、-15 °C 等 3 个不同温度下进行试验,测得该土样在不同温度下的应力-应变曲线。该组试验均在安徽理工大学冻土实验室完成,单轴压缩试验在 WDT-100D 型冻土压力试验机上进行,加载速率为 1 mm/min。当试样应力下降或轴向应变达到 20% 以上、试验应力降低 20%、试样轴向应力达到峰值后其轴向应变增加 3% 这 3 个条件只要满足一条时试验即会自动停止。由图 3 可以看出试样在试验后破坏形式多呈腰鼓状、中部破碎和底部断裂 3 种形式,3 者均是当轴向应变达到 20% 试验停止时的破坏状态。试样的破坏形态与试样中孔隙水相态有关,当液态孔隙水为主时,其承载能力较差,从而使土体向较高应力状态处滑移,由于试样两端土体颗粒间的黏聚力不足以抵抗挤压,因此产生裂缝,同时受试验装置两端摩擦力限制,导致试样两端的变形受限,最终试样呈现腰鼓型塑性破坏^[4]。图 4 为合肥膨胀土单轴试验的应力-应变曲线。

该类膨胀土在不同低温下应力-应变曲线均呈应变硬化型,取不同温度下应力-应变曲线的最大值点为强度点,发现单轴抗压强度随其冻结温度的降低而增大,且土样的强度与温度呈线性相关,如图 5 所示。图 4 表明,该单轴压缩试验主要经历了 3 个阶段:第 1 阶段为压密阶段,随着轴向压力的施加,土体愈加密实,承载能力得到提高;第 2 阶段为弹性变形阶段,应力-应变曲线近似体现出线性增长;第 3 阶段为屈服



图 2 重塑土样

Fig.2 Remolded sample



图 3 试样单轴抗压试验后

Fig.3 Pictures of samples after uniaxial compression test

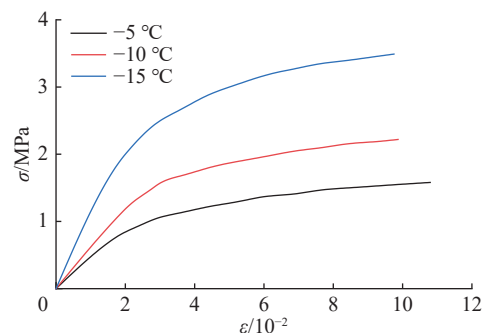


图 4 应力-应变关系曲线

Fig.4 Stress-strain curves

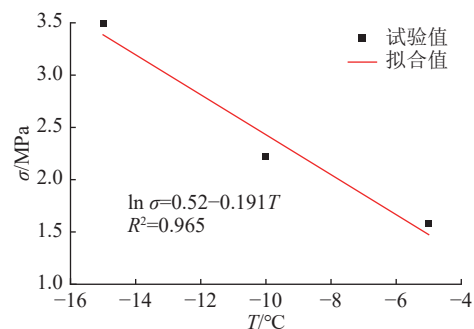


图 5 单轴强度与温度之间的关系

Fig.5 Relationship between uniaxial strength and temperature

阶段,应力随着应变的增加缓慢增大,土体产生不可恢复的塑性变形,抵抗塑性变形的应力达到最大值,

土体表面开始产生细小裂纹,应力-应变曲线逐渐平缓,裂纹贯通直至试样破坏。由于在冻结过程中,土体中的液态水转化为了固态冰,冻结土体中冰颗粒与土颗粒之间的黏结作用增强,因此冻土样的抗压强度也随之增大。

2 应力-应变分数阶导数模型

2.1 分数阶导数

Riemann-Liouville 型分数阶微积分算子对函数 $f(t)$ 的 β 阶积分定义为

$$\frac{d^{-\beta} f(t)}{dt^{\beta}} = {}_{t_0} D_t^{-\beta} f(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

式中, ${}_{t_0} D_t^{-\beta} f(t)$ 为函数 $f(t)$ 的分数阶积分的简写; t 与 τ 为自变量,通常表示时间或空间变量; β 为分数阶导数的阶次。

分数阶微分定义为

$$\frac{d^{\beta} f(t)}{dt^{\beta}} = {}_{t_0} D_t^{\beta} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[{}_{t_0} D_t^{-(n-\beta)} f(t) \right] \quad (2)$$

其中, ${}_{t_0} D_t^{\beta} f(t)$ 为函数 $f(t)$ 的分数阶积分的简写; $\beta > 0$, 且 $n-1 \leq \beta \leq n$ (n 为正整数); $\Gamma(*)$ 为 Gamma 函数,其定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (3)$$

对于函数 $f(x) = cx$, 其中 c 为常数, 当 $0 \leq \beta \leq 1$ 时, 它的分数阶微分为

$$\frac{d^{\beta} f(x)}{dx^{\beta}} = \frac{c}{\Gamma(2-\beta)} x^{1-\beta}, \quad (0 \leq \beta \leq 1) \quad (4)$$

2.2 人工冻土应力-应变分数阶导数指数模型

冻土作为一种介于理想固体和理想流体之间的材料,可以视为弹性材料、塑性材料、黏性材料按不同比例的勾兑。对于理想固体,其应力-应变关系满足胡克定律,有 $\sigma(t) - d^0 \varepsilon(t) / dt^0$ 。理想流体满足牛顿黏性定律,有 $\sigma(t) - d^1 \varepsilon(t) / dt^1$ 。采用 Riemann-Liouville 型分数阶微积分算子理论,冻土作为一种介于理想固体和理想流体之间的材料,有

$$\sigma(t) = \xi \frac{d^{\beta} \varepsilon(t)}{dt^{\beta}} \quad (5)$$

式中, ξ 为类似于胡克定律中弹性模量的参数, $\text{MPa} \cdot \text{min}^{\beta}$; $\frac{d^{\beta} \varepsilon(t)}{dt^{\beta}}$ 为应变对时间的 β 阶导数。

该式不仅能同时适用于理想固体和理想流体,还能描述介于二者之间的一些材料的力学性能,因此,分数阶导数能很好地描述这种勾兑效应。现对它进行改进,通过对上述单轴压缩试验数据进行分析,引

入温度函数,建立了不同温度条件的人工冻土单轴应力-应变分数阶指数模型:

$$\sigma(t) = \xi(T) \frac{d^{\beta} \varepsilon(t)}{dt^{\beta}} \quad (6)$$

$$\frac{d^{\beta} \varepsilon(t)}{dt^{\beta}} = \frac{v_0}{\Gamma(2-\beta)} t^{(1-\beta)} \quad (7)$$

通过建立 ξ 与温度 T 之间的关系,从而建立人工冻土单轴应力-应变分数阶指数模型。本研究只考虑恒应变率加载情况,将 $\varepsilon = v_0 t$ 代入到式 (7) 中,得

$$\frac{d^{\beta} \varepsilon(t)}{dt^{\beta}} = \frac{v_0^{\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \varepsilon^{(1-\beta)} \quad (8)$$

将式 (8) 代入到式 (6) 中,得

$$\sigma(t) = \xi(T) \frac{v_0^{\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \varepsilon^{(1-\beta)} \quad (9)$$

$$\text{令} \quad K_1 = \frac{v_0^{\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \quad (10)$$

$$\text{则} \quad \sigma = K_1 \xi(T) \varepsilon^{(1-\beta)} \quad (11)$$

式中, T 为温度; v_0 为常量 ($v_0 = 1 \text{ mm/min}$); K_1 为 ($0 < \beta < 1$) 一个常量。

当 β 不同时,材料的应力-应变曲线也有所不同,以图 4 中 $-5 \text{ }^{\circ}\text{C}$ 时的曲线数据为例,取 $K_1 = 1.1259$, $\xi(T) = 0.0684 - 0.0889T$ (式 (17)), 根据式 (11) 可得不同应变硬化指数下的应力-应变曲线,如图 6 所示。

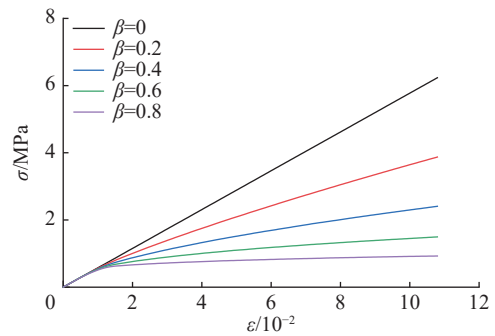


图 6 不同 β 时的应力-应变曲线

Fig.6 Corresponding stress-strain curves at different β

图 6 建立在温度相同、 E 相同的条件下,反映了 β 对材料应力-应变曲线的影响,表明当温度一定时,随着 β 的减小,即当应变硬化指数 $1-\beta$ 增大时,人工冻土的应力-应变曲线越陡,土体的承载能力就越高,抵抗变形的能力也就越强。随着 β 从 1 到 0 的降低,曲线的线性特性越来越明显,说明 β 越接近于 0,材料越接近于理想固体, β 越接近于 1,材料越接近于理想流体。殷德顺等^[5]指出当 $\beta=1$ 时,材料为理想流体;当 $\beta=0$ 时,材料为理想固体。

2.3 模型参数的确定与模型验证

对式 (11) 两边同时取对数, 得

$$\ln \sigma = \ln K_1 + \ln \xi(T) + (1 - \beta) \ln \varepsilon \quad (12)$$

由式 (12) 可知, $\ln \sigma - \ln \varepsilon$ 曲线拟合直线斜率即为冻土应变硬化指数, 截距等于 $\ln K_1$ 与 $\ln \xi$ 之和。下面对人工冻土单轴应力-应变分数阶指数模型的参数进行确定。

以合肥地区的膨胀土为例, 图 7 为该土样在不同温度下的 $\ln \sigma - \ln \varepsilon$ 曲线。研究表明, 由于各温度作用下对应的斜率 $1 - \beta$ 接近平行, 因此认为温度对斜率 $1 - \beta$ 的影响不大, 故取平均值 $1 - \bar{\beta} = 0.3843$ 。

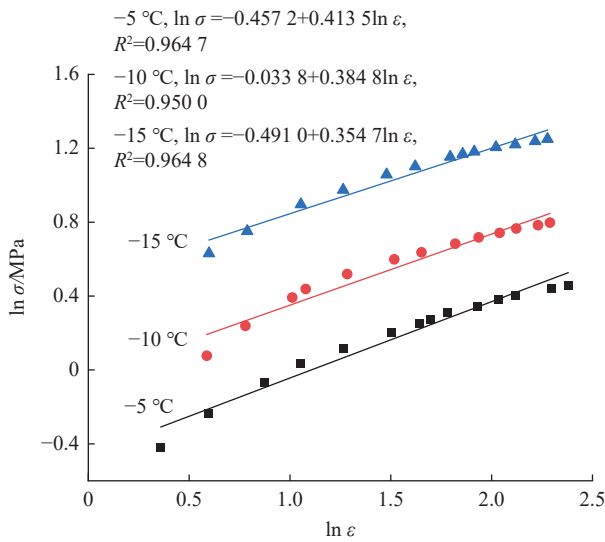


图 7 $\ln \sigma - \ln \varepsilon$ 关系曲线

Fig.7 $\ln \sigma - \ln \varepsilon$ curves

由式 (10) 得到 K_1 的表达式:

$$K_1 = \frac{v_0^\beta}{\Gamma(1.3843)} \quad (13)$$

由式 (13) 可以求出 $K_1 = 1.1259$ 。由图 7 可知拟合曲线的截距等于 $\ln K_1$ 与 $\ln \xi$ 之和, 将不同温度下的截距与 K_1 值代入式 (14)~(16) 求得不同温度下的 $\xi(T)$ 值见表 2。

$$\ln K_1 + \ln \xi(T) = -0.4572 (-5^\circ \text{C}) \quad (14)$$

$$\ln K_1 + \ln \xi(T) = -0.0338 (-10^\circ \text{C}) \quad (15)$$

$$\ln K_1 + \ln \xi(T) = 0.4910 (-15^\circ \text{C}) \quad (16)$$

拟合发现, 函数 $\xi(T)$ 与温度 T 呈线性相关 (图 8), 并随着温度的升高而降低, 其函数关系表达式为

$$\xi(T) = 0.0684 - 0.0889T \quad (17)$$

将式 (17) 代入到式 (11), 得

$$\sigma = 1.1259(0.0684 - 0.0889T)\varepsilon^{(1-\beta)} \quad (18)$$

表 2 不同温度下 $\xi(T)$ 的对应值

Table 2 Corresponding values of $\xi(T)$ at different temperatures

$T/^\circ\text{C}$	-5	-10	-15
$\xi(T)/(\text{MPa} \cdot \text{min}^\beta)$	0.5623	0.8587	1.4514

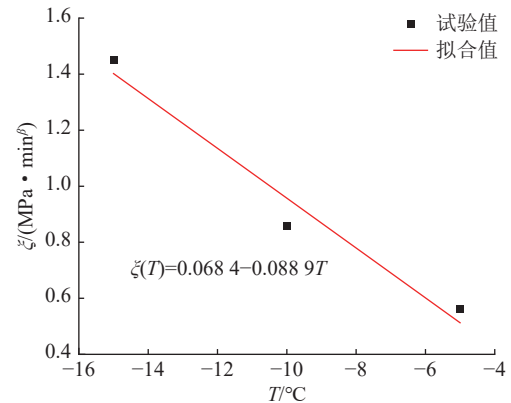


图 8 温度函数拟合

Fig.8 Temperature function fitting diagram

根据式 (18) 建立的人工冻土单轴应力-应变分数阶指数模型计算出不同温度下的应力, 并绘制不同温度下的试验值与计算值的对比, 如图 9 所示。研究表明计算值与试验值的变化趋势较为接近, 人工冻土单轴应力-应变分数阶指数模型可以很好地描述冻土单轴压缩的应变硬化曲线。

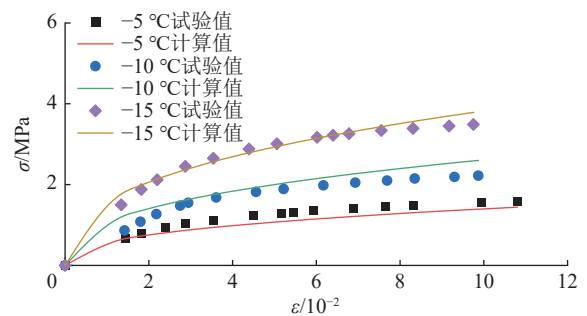


图 9 不同温度下应力的试验值与计算值对比

Fig.9 Comparison of experimental and calculated values of stress at different temperatures

为了进一步验证人工冻土单轴应力-应变分数阶指数模型的可靠性, 该研究同时对其他冻土样进行了验证。对蔡聪等^[18]针对兰州冻结黄土 (加载速率为 3.75 mm/min) 进行的常规单轴试验数据进行 $\ln \sigma - \ln \varepsilon$ 曲线拟合, 图 10 为不同温度下的应力-应变曲线, 图 11 为其 $\ln \sigma - \ln \varepsilon$ 曲线, 冻结黄土样 $\ln \sigma - \ln \varepsilon$ 曲线可以被很好地拟合成直线。

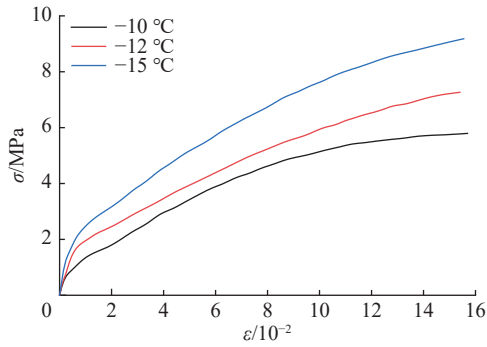
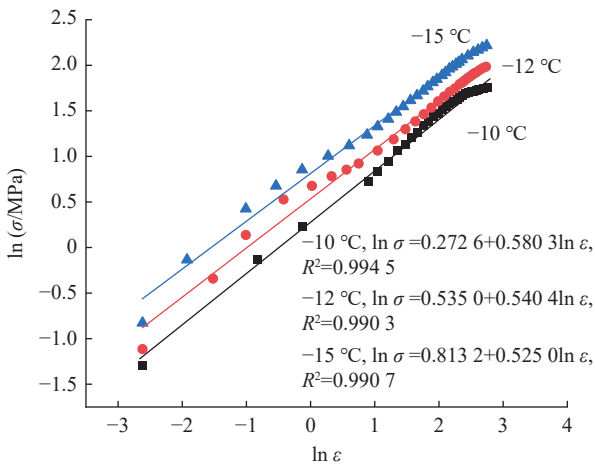


图 10 应力-应变关系曲线

Fig.10 Stress-strain curves

图 11 $\ln \sigma - \ln \varepsilon$ 关系曲线Fig.11 $\ln \sigma - \ln \varepsilon$ curves

通过式 (12) 对兰州冻黄土样单轴压缩试验数据进行计算, 由图 11 可知, 不同冻结温度下对应的斜率 $1-\beta$ 接近平行, 可以认为温度对斜率 $1-\beta$ 的影响不大, 故取平均值 $1-\bar{\beta} = 0.548 6$ 。

由式 (10) 求得 K_1 值的表达式为

$$K_1 = \frac{v_0^\beta}{\Gamma(1.548 6)} \quad (19)$$

通过式 (19) 求出 $K_1=2.043 2$ 。图 11 中拟合曲线的截距等于 $\ln K_1$ 与 $\ln \xi$ 之和, 将不同温度下的截距与 K_1 值代入式 (20)~ (22) 可得不同温度下的 $\xi(T)$ 值见表 3。

$$\ln K_1 + \ln \xi(T) = 0.272 6 (-10^\circ \text{C}) \quad (20)$$

$$\ln K_1 + \ln \xi(T) = 0.535 0 (-12^\circ \text{C}) \quad (21)$$

$$\ln K_1 + \ln \xi(T) = 0.813 2 (-15^\circ \text{C}) \quad (22)$$

拟合发现, 函数 $\xi(T)$ 与温度 T 呈线性相关 (图 12), 并随着温度的升高而降低, 其函数关系表达式为

$$\xi(T) = -0.273 4 - 0.092 0 T \quad (23)$$

将式 (19) 代入到式 (11), 得

$$\sigma = K_1 (-0.273 4 - 0.092 0 T) \varepsilon^{(1-\beta)} \quad (24)$$

表 3 不同温度下 $\xi(T)$ 的对应值Table 3 Values of $\xi(T)$ at different temperatures

$T/^\circ\text{C}$	-10	-12	-15
$\xi(T)/(\text{MPa} \cdot \text{min}^\beta)$	0.642 8	0.835 7	1.103 7

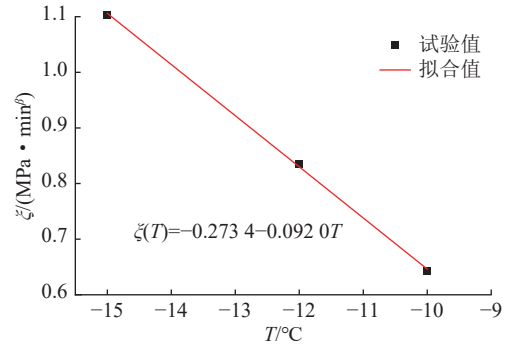


图 12 温度函数拟合

Fig.12 Temperature function fitting diagram

根据式 (24) 建立的冻土应变硬化指数模型计算出 3 组冻结温度下的应力, 试验值与计算值对比如图 13 所示。结果表明, 兰州冻结黄土的试验值与计算值曲线也较为接近, 吻合度较高, 拟合优度均能达到 0.98 左右, 依旧满足人工冻土单轴应力-应变分数阶指数模型。

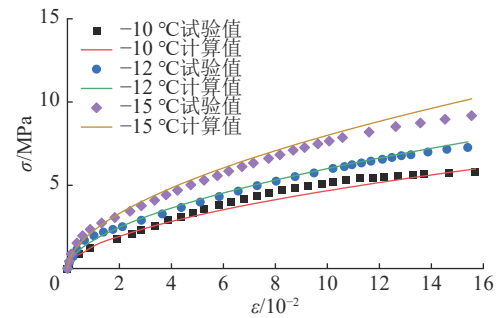


图 13 不同温度下应力的试验值与计算值对比

Fig.13 Comparison of experimental and calculated values of stress at different temperatures

3 冻土三轴压缩应力-应变分数阶指数模型

由于三轴固结剪切试验在固结完成后其轴向应变仅由 $\sigma_1 - \sigma_3$ 提供, 因此冻土应变硬化指数模型可应用于三轴固结剪切试验, 并在单轴的基础上进一步考虑围压的影响。改进后的人工冻土应力-应变分数阶指数模型为

$$\sigma = K_1 (\sigma_3) \xi(T, \sigma_3) \varepsilon^{[1-\beta(\sigma_3)]} \quad (25)$$

以孙谷雨等^[19]研究的南京地区冻结粉质黏土数据为研究对象, 图 14 为围压为 0.6、1.0、1.4 MPa 下孙

谷雨等^[19]研究的南京地区冻结粉质黏土 (加载速率为 1 mm/min) 在 -5、-10、-15 °C 下的应力-应变曲线。

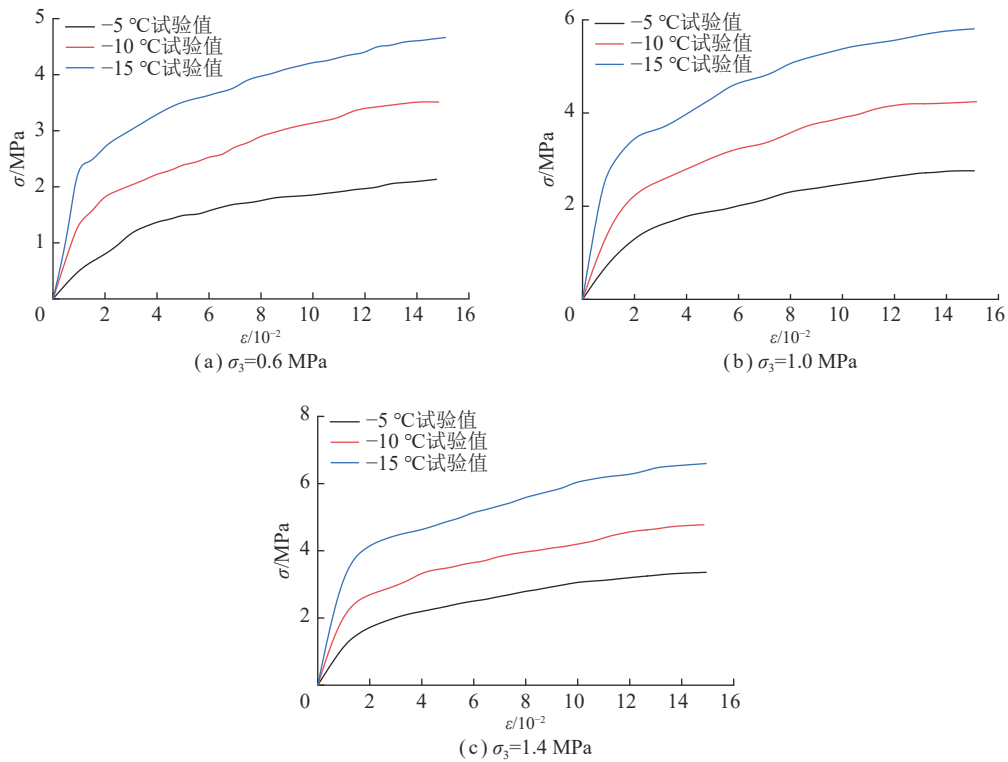


图 14 不同围压与温度下的应力-应变曲线

Fig.14 Stress-strain curves under different confining pressures and temperatures

由图 14 和表 4 可知: 围压与温度对冻结粉质黏土三轴剪切强度均有影响。当围压一定时, 冻结粉质黏土抗剪强度随温度的降低而增加, 其主要原因是随着温度的降低, 土体中水相变成冰, 冻结土体中冰颗粒与土颗粒之间的黏结作用增强, 从而使土体的强度增大。当温度一定时, 冻结粉质黏土抗剪强度随围压的增大而增大, 且增大的幅度较大, 主要原因是随着围压的增大, 土体内部存在的大量间隙闭合, 土体更加紧致, 增强了土体的整体性, 从而提高土体的强度^[19]。

表 4 不同温度和围压下的抗压强度

Table 4 The compressive strength at different temperatures and confining pressures

σ_3/MPa	抗压强度/MPa		
	-5 °C	-10 °C	-15 °C
0.6	2.13	3.51	4.66
1.0	2.76	4.24	5.81
1.4	3.36	4.77	6.60

为确定三轴固结剪切试验中人工冻土三轴应力-应变分数阶指数模型的参数, 对该组冻结粉质黏土数据的 $\ln(\sigma_1 - \sigma_3) - \ln \varepsilon_1$ 曲线进行拟合, 如图 15 所示。拟合结果表明同一围压下各温度作用的拟合曲线斜

率接近平行, 说明温度对斜率 $1 - \beta$ 的影响不大, 故对斜率 $1 - \beta$ 取平均值 $1 - \bar{\beta}$ ^[20-21]。通过计算可得出不同围压下的平均斜率见表 5。

由图 16 通过拟合发现, $1 - \bar{\beta}$ 与围压 σ_3 之间呈线性关系, 其关系表达式为

$$1 - \bar{\beta} = 0.4967 - 0.1444\sigma_3, R^2 = 0.9999 \quad (26)$$

由式 (10) 可以得到 K_1 值有关围压的表达式:

$$K_1 = \frac{v_0^\beta}{\Gamma(1.4967 - 0.1444\sigma_3)} \quad (27)$$

根据式 (12) 对孙谷雨等^[19]研究的南京地区冻结粉质黏土的三轴试验压缩数据进行计算, 由式 (27) 计算出不同温度不同围压下的 K_1 , 再将求出的 K_1 与不同围压不同温度下对应的截距代入到式 (12) 中, 计算出不同温度 T 和不同围压 σ_3 下的 ξ 见表 6。

由表 6 通过拟合发现, 温度 T 、围压 σ_3 和 ξ 之间呈线性曲面的关系, 利用多元线性回归的方法可以得到 ξ 与温度 T 和围压 σ_3 之间的关系, 其关系表达式为

$$\xi(T, \sigma_3) = -1.1241 - 0.1592T + 1.1497\sigma_3, R^2 = 0.9784 \quad (28)$$

将式 (28) 代入式 (25) 得到三轴固结条件下的应

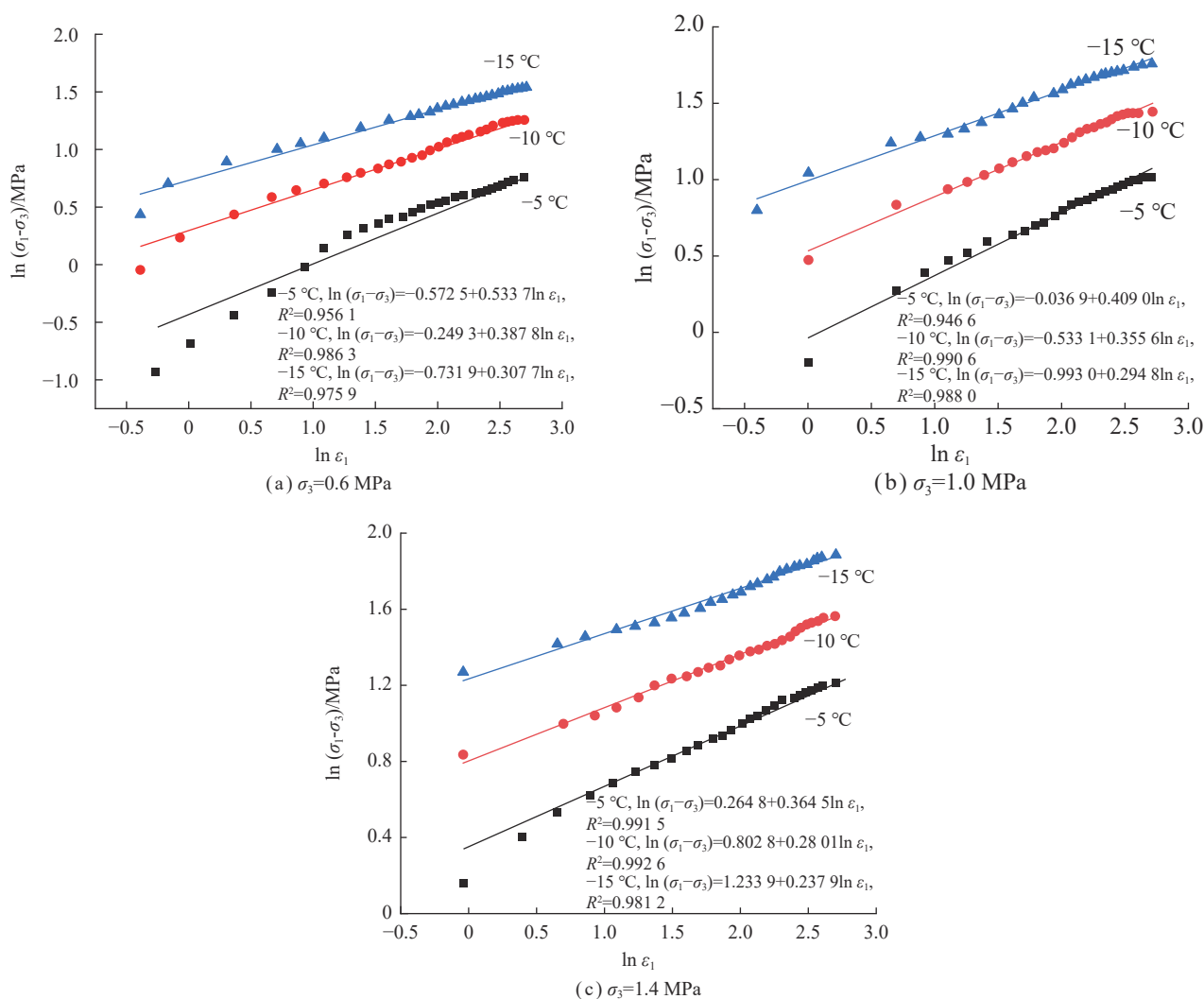
图 15 不同围压与温度下的 $\ln(\sigma_1 - \sigma_3) - \ln \varepsilon_1$ 曲线Fig. 15 $\ln(\sigma_1 - \sigma_3) - \ln \varepsilon_1$ curves under different confining pressures and temperatures

表 5 不同温度和围压下的 $1-\bar{\beta}$

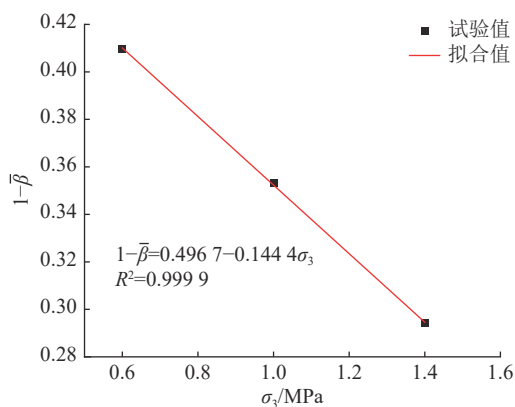
Table 5 $1-\bar{\beta}$ at different temperatures and confining pressures

σ_3/MPa	$1-\bar{\beta}$			$1-\bar{\beta}$
	-5 °C	-10 °C	-15 °C	
0.6	0.533 7	0.387 8	0.307 7	0.409 7
1.0	0.409 0	0.355 6	0.294 8	0.353 1
1.4	0.364 5	0.280 1	0.237 9	0.294 2

力-应变方程:

$$\sigma = K_1 (-1.124 1 - 0.159 2T + 1.149 7\sigma_3) \varepsilon^{(1-\bar{\beta})} \quad (29)$$

当围压 σ_3 一定时, ξ 随着温度 T 的降低而增大; 当温度 T 一定时, ξ 随着围压 σ_3 的增大而增大。根据式 (29) 建立的冻土应变硬化指数模型计算出不同温度下的应力, 并对比不同围压不同温度下应力的试验值与计算值, 如图 17 所示。结果表明: 回归分析结果与试验

图 16 围压与 $1-\bar{\beta}$ 拟合Fig. 16 Fitting curve of confining pressures and $1-\bar{\beta}$

结果基本吻合, 人工冻土应力-应变分数阶指数模型同样适用于三轴剪切试验。

4 结 论

(1) 基于人工冻结岩土无侧限单轴压缩试验建立

表 6 不同温度和围压下的 ξ Table 6 ξ at different temperatures and confining pressures

σ_3/MPa	$\xi/(\text{MPa} \cdot \text{min}^\beta)$		
	-5 °C	-10 °C	-15 °C
0.6	0.525 3	1.137 8	1.843 6
1.0	0.858 6	1.518 3	2.404 9
1.4	1.175 4	2.004 9	3.085 5

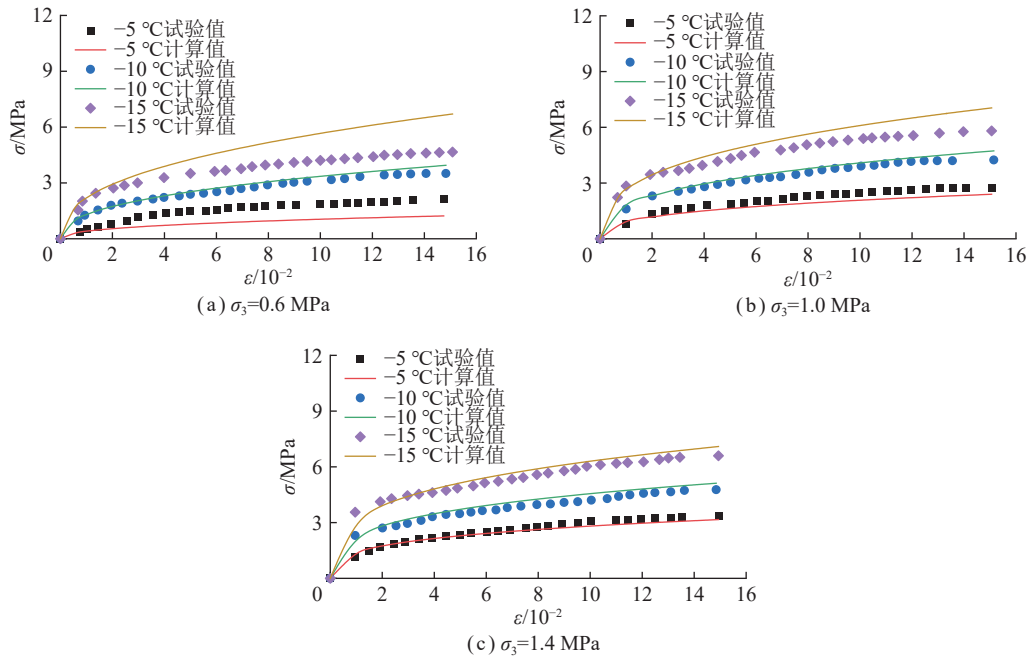


图 17 不同围压与温度下应力的试验值与计算值对比

Fig.17 Comparison of experimental and calculated values of stress under different confining pressures and temperatures

人工冻土压缩曲线有应变硬化和应变软化 2 种类型。所建的模型只能反映应变硬化型, 下一步将在模型中考虑损伤进而建立应变软化型分数阶指数模型。另外, 由于人工冻土具有结构性、各向异性, 如何在模型中反映这 2 者对应力-应变的影响也将是下一步的研究内容。

参考文献(References):

- [1] 许多, 吴世勇, 张茹, 等. 锦屏深部大理岩蠕变特性及分数阶蠕变模型[J]. 煤炭学报, 2019, 44(5): 1456-1464.
XU Duo, WU Shiyong, ZHANG Ru, et al. Creep characteristics and creep model of deep buried marble at Jinping underground laboratory[J]. Journal of China Coal Society, 2019, 44(5): 1456-1464.
- [2] 王伟, 宋新江, 凌华, 等. 滨海相软土应力-应变曲线复合指数-双曲线模型[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(9): 1455-1459.
WANG Wei, SONG Xinjiang, LING Hua, et al. Composite exponential-hyperbolic model for stress-strain curve of seashore soft soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(9): 1455-1459.
- [3] 王丽琴, 鹿忠刚, 邵生俊. 岩土体复合幂-指数非线性模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, 36(5): 1269-1278.
WANG Liqin, LU Zhonggang, SHAO Shengjun. A composite power exponential nonlinear model of rock and soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, 36(5): 1269-1278.
- [4] 汪恩良, 任志凤, 韩红卫, 等. 超低温冻结黏土单轴抗压力学性质试验研究[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(10): 1851-1860.
WANG Enliang, REN Zhifeng, HAN Hongwei, et al. Experimental study on uniaxial compressive strength of ultra-low temperature frozen clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, 43(10): 1851-1860.
- [5] 殷德顺, 和成亮, 陈文. 岩土应变硬化指数理论及其分数阶微积分理论基础[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(5): 762-766.
YIN Deshun, HE Chengliang, CHEN Wen. Theory of geotechnical strain hardening index and its rationale from fractional order calculus[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(5): 762-766.
- [6] HOLLOMON J H. The effect of heat treatment and carbon content on the work hardening characteristics of several steel[J]. Transactions of ASM, 1944, 32: 123-133
- [7] 陈晨, 孙逸飞, 宋顺翔. 砂土三轴压缩和拉伸行为的分数阶塑性模型[J]. 防灾减灾工程学报, 2020, 40(3): 380-386.
CHEN Chen, SUN Yifei, SONG Shunxiang. Fractional order plastic

- model for sand under triaxial compressive and extensive loads[J]. *Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering*, 2020, 40(3): 380–386.
- [8] 孙逸飞, 高玉峰, 鞠雯. 分数阶塑性力学及其砂土本构模型[J]. *岩土工程学报*, 2018, 40(8): 1535–1541.
SUN Yifei, GAO Yufeng, JU Wen. Fractional plasticity and its application in constitutive model for sands[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2018, 40(8): 1535–1541.
- [9] 李海潮, 马博, 张升, 等. 基于分数阶热弹塑性理论的软岩力学特性描述[J]. *岩石力学与工程学报*, 2020, 39(7): 1311–1320.
LI Haichao, MA Bo, ZHANG Sheng, et al. Mechanical behaviors of soft rocks based on the fractional thermal elastic-plastic theory[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2020, 39(7): 1311–1320.
- [10] SUN Y F, XIAO Y. Fractional order plasticity model for granular soils subjected to monotonic triaxial compression[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, 118: 224–234.
- [11] SUN Y, XIAO Y. Fractional order model for granular soils under drained cyclic loading[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2017, 41(4): 555–577.
- [12] SUN Y F, SHEN Y. Constitutive model of granular soils using fractional-order plastic-flow rule[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2017, 17(8): 04017025.
- [13] SUN Y, GAO Y, SHEN Y. Mathematical aspect of the state-dependent stress–dilatancy of granular soil under triaxial loading[J]. *Géotechnique*, 2019, 69(2): 158–165.
- [14] SUN Y F, GAO Y F, ZHU Q Z. Fractional order plasticity modelling of state-dependent behaviour of granular soils without using plastic potential[J]. *International Journal of Plasticity*, 2018, 102: 53–69.
- [15] LU D C, LIANG J Y, DU X L, et al. Fractional elastoplastic constitutive model for soils based on a novel 3D fractional plastic flow rule[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, 105: 277–290.
- [16] QU P F, ZHU Q Z, SUN Y F. Elastoplastic modelling of mechanical behavior of rocks with fractional-order plastic flow[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 163: 105102.
- [17] 左维亚. 低温条件下合肥弱膨胀土力学特性及冻结规律研究[D]. 淮南: 安徽理工大学, 2022.
ZUO Weiya. Study on mechanical properties and freezing law of Hefei weak expansive soil under low temperature[D]. Huainan: Anhui University of Science & Technology, 2022.
- [18] 蔡聪, 马巍, 赵淑萍, 等. 冻结黄土的单轴试验及其本构模型研究[J]. *岩土工程学报*, 2017, 39(5): 879–887.
CAI Cong, MA Wei, ZHAO Shuping, et al. Uniaxial tests on frozen loess and its constitutive model[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, 39(5): 879–887.
- [19] 孙谷雨, 杨平, 刘贯荣. 南京地区冻结粉质黏土邓肯–张模型参数试验研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2014, 33(S1): 2989–2995.
SUN Guyu, YANG Ping, LIU Guanrong. Experimental test on constitutive relationship of Nanjing frozen silty clay considering Duncan-Chang model[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, 33(S1): 2989–2995.
- [20] 姚兆明, 陈伟, 高亚飞, 等. 冻结黏土侧限压缩变形的 S-M 模型[J]. *应用力学学报*, 2021, 38(4): 1392–1399.
YAO Zhaoming, CHEN Wei, GAO Yafei, et al. S-M model of confined compression deformation of frozen clay[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2021, 38(4): 1392–1399.
- [21] 姚兆明, 张雯, 郭梦圆. 考虑温度效应的冻结黏土内变量蠕变模型分析[J]. *长江科学院院报*, 2020, 37(12): 81–85, 91.
YAO Zhaoming, ZHANG Wen, GUO Mengyuan. An internal-variable creep model for frozen clay in consideration of temperature effect[J]. *Journal of Yangtze River Scientific Research Institute*, 2020, 37(12): 81–85, 91.