

文章编号: 0253-9993(2012)01-0021-07

裂隙岩石拉伸断裂破坏理论分析试探

任 利¹ 谢和平^{1,2} 朱哲明¹ 李碧勇¹ 艾 婷²

(1. 四川大学 建筑与环境学院 四川 成都 610065; 2. 四川大学 水利水电学院 四川 成都 610065)

摘 要: 利用边界配置法对最大周向应力理论、有效应力理论进行了修正,建立了实验室尺度下拉剪裂纹的两种破坏准则,并通过相应的破坏准则建立起了岩石单轴拉伸强度与断裂韧度之间的关系,给出了量化裂隙岩石试件抗拉强度的无量纲量,分析了裂纹倾角、裂纹长度对裂纹尖端开裂角及裂隙岩石试件的抗拉断能力的影响。结果表明,开裂角以及裂隙岩石的抗拉断裂能力(抗拉强度)均随裂纹倾角的增大而增大;对于具有宏观裂隙的试件,开裂角及抗拉断能力随裂隙长度的增加而递减;试件的尺度对裂隙岩石的强度影响不容忽视。

关键词: 裂隙岩石; 断裂准则; 应力强度因子; 实验室尺度; 复变函数; 边界配置法
中图分类号: TD313 文献标志码: A

Failure analysis of cracked rock specimen under tension

REN Li¹, XIE He-ping^{1,2}, ZHU Zhe-ming¹, LI Bi-yong¹, AI Ting²

(1. School of Architecture and Environment, Sichuan University, Chengdu 610065, China; 2. School of Water Resource and Hydropower, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: The maximum circumferential stress theory and the effective stress theory were improved based on the boundary collocation method, and then two kinds of failure criterion in the laboratory-scale were established. Moreover, the relationships between rock uniaxial tensile strength and fracture toughness were also developed through the corresponding criteria. Finally, the dimensionless variable which could quantify the uniaxial tensile strength was proposed; meanwhile the influences of crack inclination and crack length on the initial failure angle and the tensile strength of cracked rock mass were analyzed. The results show that both the initial failure angle and the tensile strength increase with the increase of crack inclination, and for specimens containing macroscopic cracks, both the initial failure angle and the tensile strength decrease as the crack length increases which indicates that the specimen scale has a great impact on rock fracture strength.

Key words: cracked rock mass; fracture criteria; stress intensity factor; laboratory-scale; complex function; boundary collocation method

岩石的抗拉强度是岩石试件在单轴拉力作用下抵抗破坏的极限能力,或极限强度,它在数值上等于破坏时的最大拉应力。与岩石抗压强度的研究相比,对抗拉强度的研究较少^[1],对裂隙岩石材料的抗拉强度的研究则更少。从丰富断裂力学和服务实际工程的角度来说,研究裂隙岩石受拉的力学特性具有积极的意义。在实验室尺度下,总是可以找到含有宏观

裂纹的岩石试件,此时,无法将其当作无限大体进而使用传统断裂力学的理论进行处理。朱哲明等^[2-8]使用边界配置法对含裂隙的有限体的应力强度因子做了详尽的讨论。事实上,研究者更为关注的是裂隙岩石的起裂判据、裂隙岩石的强度。王元汉等^[9]采用不同的断裂准则,判断了拉剪和压剪裂纹开裂方向及抗压强度;赵治枢^[10]建立了用单参数 K 表示裂纹

收稿日期: 2011-07-21 责任编辑: 王婉洁

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973) 资助项目(2011CB201201, 2010CB226802); 国家自然科学基金资助项目(51074109)

作者简介: 任 利(1987—), 男, 重庆人, 硕士研究生。E-mail: renli-scu@hotmail.com。通讯作者: 朱哲明(1965—), 男, 辽宁葫芦岛人, 教授, 博士生导师。E-mail: zhemingzhu@hotmail.com

尖端的有效应力表达式,并给出了相应的破坏准则;李世愚^[11]对复合裂纹的断裂判据进行了详细的叙述,并给出了诸多基于断裂力学的强度公式。然而,在实验室尺度下,使用无限大体的理论讨论有限大体的断裂机理不免牵强。同时,断裂判据又是断裂力学的核心。基于此,本文使用复变函数与边界配置法并结合线弹性断裂力学的最大周向理论及非线性断裂力学的有效应力理论建立了实验室尺度下裂隙岩石的断裂判据,给出了裂隙初始开裂角关于裂隙倾角、长度的变化规律,讨论了裂隙长度、裂隙倾角对裂隙岩石抗拉伸断裂能力的影响。其中,裂隙岩石抗拉伸断裂能力能直接反映单轴拉伸强度的大小。

1 基于最大周向应力理论的断裂准则

含斜裂纹的受拉岩石的断裂形式为拉剪复合型断裂。按照断裂力学的一般假设,无限大体内部有一长度为 $2a$ 的裂纹,与水平方向的夹角为 β ,远场拉应力为 σ ,那么裂纹尖端应力强度因子可由式(1)确定^[11]。

$$\begin{cases} K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \beta \\ K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \end{cases} \quad (1)$$

假设有限大体裂纹尖端的 I 型和 II 型断裂强度因子分别为 K_{I0} 、 K_{II0} ,与 K_I 、 K_{II} 的比值为 Y_I 、 Y_{II} ,按照最大周向应力理论^[11],开裂角 θ_0 由以下方程决定:

$$Y_I K_I \sin \theta_0 + Y_{II} K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (2)$$

起裂载荷由下式决定:

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} [Y_I K_I (1 + \cos \theta_0) - 3 Y_{II} K_{II} \sin \theta_0] = K_{Ic} \quad (3)$$

其中 K_{Ic} 为 I 型断裂韧度。简记式(3)为如下形式:

$$\lambda_1 K_I + \lambda_2 K_{II} = K_{Ic} \quad (4)$$

式中, $\lambda_1 = \frac{Y_I}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} (1 + \cos \theta_0)$; $\lambda_2 = -\frac{3 Y_{II}}{2} \times \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \theta_0$ 。

式(4)基于最大周向应力理论建立了有限大体的脆性断裂判据。事实上,它还具有更为现实的意义,由于有限大体断裂理论的复杂性,而式(4)就提供了可使用传统无限大体断裂力学所表示的应力强度因子进行计算、分析的破坏准则。至此,裂隙岩石在拉伸试验条件下的抗拉强度 R_t 也就可以通过式(4)得到

$$R_t = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a} \cos \beta (\lambda_1 \cos \beta + \lambda_2 \sin \beta)} \quad (5)$$

2 基于有效应力理论的断裂准则

众所周知,岩石的应力应变行为仅仅在一定范围内是近似线弹性的,而超越该范围必须应用非线性的断裂判据。赵诒枢^[10]在裂纹前缘坐标系 (r, θ) 建立了用单参数 K 表示的裂纹尖端的有效应力的表达式:

$$\sigma_{\text{eff}} = \left[\frac{3}{8\pi r} (b_{11} K_{I0}^2 + 2b_{12} K_{I0} K_{II0} + b_{22} K_{II0}^2) \right]^{1/2} \quad (6)$$

其中, $b_{11} = \xi(1 + \cos \theta) + \sin^2 \theta$; $b_{12} = \sin 2\theta - \xi \sin \theta$; $b_{22} = 1 + \xi(1 - \cos \theta) + 3 \cos^2 \theta$; $\xi = (\kappa - 1)^2 / 6$; $\kappa = \begin{cases} 3 - 4\gamma & (\text{平面应变}) \\ (3 - \gamma) / (1 + \gamma) & (\text{平面应力}) \end{cases}$, γ 为泊松比。

采用与前面相同的记号,改写式(6)为如下形式:

$$\sigma_{\text{eff}} = \left[\frac{3}{8\pi r} (b_{11} K_I^2 + 2b_{12} K_I K_{II} + b_{22} K_{II}^2) \right]^{1/2} \quad (7)$$

b_{11} 、 b_{12} 和 b_{22} 形式上发生了改变,具体为

$$\begin{cases} b_{11} = Y_I^2 [\xi(1 + \cos \theta) + \sin^2 \theta] \\ b_{12} = Y_I Y_{II} (\sin 2\theta - \xi \sin \theta) \\ b_{22} = Y_{II}^2 [1 + \xi(1 - \cos \theta) + 3 \cos^2 \theta] \end{cases}$$

当某点的有效应力 σ_{eff} 等于单轴拉伸的屈服强度 σ_y 时,材料开始屈服。那么,即有裂纹尖端的初始弹塑性边界方程:

$$r = \frac{3}{8\pi\sigma_y^2} [b_{11} K_I^2 + 2b_{12} K_I K_{II} + b_{22} K_{II}^2] \quad (8)$$

文献[10]还给出了2个假设:

(1) 裂纹初始扩展的方向是裂纹尖端至初始弹-塑性边界距离最短的方向;

(2) 当此方向上的有效应力达到 I 型裂纹的临界张应力时,裂纹初始失稳扩展发生。

根据假设(1)有

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} = 0 \quad (9)$$

把式(8)代入式(9),开裂角方程即为

$$c_1 \sin \theta_0 + c_2 \cos \theta_0 + c_3 \sin 2\theta_0 + c_4 \cos 2\theta_0 = 0 \quad (10)$$

式中, $c_1 = \xi Y_{II}^2 \tan^2 \beta - \xi Y_I^2$; $c_2 = -2\xi Y_I Y_{II} \tan \beta$; $c_3 = Y_I^2 - 3Y_{II}^2 \tan^2 \beta$; $c_4 = 4Y_I Y_{II} \tan \beta$ 。

考虑纯 I 型裂纹^[11],有

$$K_{II} = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \sigma_{\theta\theta c} = K_{Ic} / \sqrt{2\pi r} \quad (11)$$

根据假设(2),并联立式(7)和式(11)可得到用式(12)表示的基于有效应力理论的有限大体的断裂准则:

$$\lambda_{11}K_I^2 + 2\lambda_{12}K_I K_{II} + \lambda_{22}K_{II}^2 = 2\xi K_{Ic}^2 \quad (12)$$

式中, $\lambda_{11} = \frac{3}{4}Y_I^2 [\xi(1 + \cos \theta_0) + \sin^2 \theta_0]$; $\lambda_{12} = \frac{3}{4}Y_I Y_{II} (\sin 2\theta_0 - \xi \sin \theta_0)$; $\lambda_{22} = \frac{3}{4}Y_{II}^2 [1 + \xi(1 - \cos \theta_0) + 3\cos^2 \theta_0]$ 。

式(12)以传统无限大体断裂力学所表示的应力强度因子建立了实验室尺度下的非线性断裂准则。由式(12)即可得到裂隙岩石在拉伸试验条件下的抗拉强度

$$R_t = \frac{K_{Ic}}{\cos \beta \sqrt{\pi a} \sqrt{\lambda_{11} \cos^2 \beta + \lambda_{12} \sin 2\beta + \lambda_{22} \sin^2 \beta}} \quad (13)$$

3 无量纲量 Y_I 、 Y_{II} 的求解

式(4)和式(12)建立了实验室尺度下的断裂判据,但里面引入了2个未知的无量纲量 Y_I 、 Y_{II} 。要想获得这2个参量首先要解决有限大体应力强度因子的求解问题^[2-8, 12]。

3.1 边界配置法求解 Y_I 、 Y_{II}

Muskhelishvili^[13]用复应力函数 $\Phi(z)$ 、 $\Omega(z)$ 及 $\varphi(z)$ 、 $\omega(z)$ 建立了完整的平面弹性力学的复变函数表达式:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re}\Phi(z) \quad (14)$$

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \quad (15)$$

$$-Y + iX = \sum_{k=1}^M E_k [\sqrt{z^2 - a^2} z^{k-1} + \sqrt{z^2 - a^2} \bar{z}^{k-1}] + \sum_{k=1}^M F_k (z^k - \bar{z}^k) + \frac{\left\{ \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \sum_{k=1}^M E_k \left[k - (k-1) \left(\frac{a}{z} \right)^2 \right] z^k + \sum_{k=1}^M k F_k z^{k-1} \right\} (z - \bar{z})}{\quad} \quad (24)$$

进而

$$K_{I0} - iK_{II0} = 2\sqrt{\pi} \sum_{k=1}^M E_k a^{k-3/2} \quad (25)$$

式(25)即为有限大体裂纹尖端应力强度因子的表达式。按照此前引入的无量纲系数 Y_I 、 Y_{II} 的具体意义,可得到 Y_I 、 Y_{II} 的计算公式:

$$Y_I - iY_{II} = \frac{2 \sum_{k=1}^M \text{Re}(E_k) a^{k-2}}{\sigma \cos^2 \beta} - i \frac{4 \sum_{k=1}^M \text{Imag}(E_k) a^{k-2}}{\sigma \sin 2\beta} \quad (26)$$

如果能得到系数 E_k ,自然可得到 Y_I 、 Y_{II} 。事实上,为了得到系数 E_k ,可以在边界上布置一定数目的配置点,通过式(24)建立关于系数 E_k 和 F_k 的方程组,采用最小二乘法即可求解。

$$X + iY = -i[\varphi(z) + \omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}]_A^B \quad (16)$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z) \quad \Omega(z) = \omega'(z) \quad (17)$$

$$\omega(z) = z\varphi'(z) + \psi(z) \quad (18)$$

其中 $X+iY$ 为合外力。考虑含单个线性裂纹的岩样,由于裂尖附近应力场具有 $r^{1/2}$ 的奇异性,这里选取解析函数 $X(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$,并注意应力函数 $\Phi(z)$ 、 $\Omega(z)$ 所应满足的 Hilbert 条件,可设以级数形式表示的应力函数^[2 91]:

$$\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \sum_{k=1}^M A_k z^{k-1} \quad (19)$$

$$\Phi(z) - \Omega(z) = 2 \sum_{k=1}^M B_k z^{k-1} \quad (20)$$

其中 A_k 、 B_k 为复系数; M 为截取的级数项数。至此,相应的 $\varphi(z)$ 、 $\omega(z)$ 、 $\varphi'(z)$ 、 $\omega'(z)$ 可表示为:

$$\varphi(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \sum_{k=1}^M E_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^M F_k z^k \quad (21)$$

$$\omega(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \sum_{k=1}^M E_k z^{k-1} - \sum_{k=1}^M F_k z^k \quad (22)$$

$$\varphi'(z) = \sum_{k=1}^M E_k \frac{z^k}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[k - (k-1) \left(\frac{a}{z} \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^M k F_k z^{k-1} \quad (23)$$

其中 E_k 、 F_k 为复系数。将式(21)~(23)代入力边界条件式(16)中,得合力边界条件

3.2 裂纹倾角、长度对 Y_I 、 Y_{II} 的影响

四川大学水利水电学院的 MTS815 岩石力学实验系统采用黏接岩石试样的方式进行拉伸强度的测试。其试样按照国际岩石力学学会 (ISRM) 的要求制备,两端黏接部分的尺寸可调节。本文讨论的裂隙岩样的力学模型如图 1 所示。

为了更好地找到裂纹尖端应力强度因子无量纲量 Y_I 、 Y_{II} 与裂纹倾角之间的关系,表 1 和表 2 给出了不同裂纹倾角 β 在裂纹半长与试件半宽 (半直径) 之比 a/W 分别为 0.25 和 0.49 下的无量纲量 Y_I 、 Y_{II} 。从表 1、2 可知: 裂纹倾角 $\beta=0$ 时 Y_{II} 没有意义,因为裂纹面之间没有相互错动; 裂纹倾角 $\beta=90^\circ$ 时, Y_I 、 Y_{II} 没有意义,此时可将其视为完整岩石试件予以考虑; 除此以外, Y_I 、 Y_{II} 对裂纹倾角的变化并不敏感。因此,当裂纹长度明确以后,为了简化计算可认为

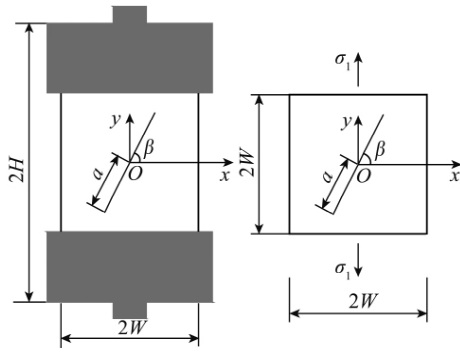


图 1 裂隙岩石试样及其力学模型

Fig. 1 Cracked rock specimen and its mechanical model

Y_{\perp} 、 Y_{\parallel} 与裂纹倾角无关。

表 1 和表 2 还从侧面反映出了裂纹长度比 a/W 对 Y_{\perp} 、 Y_{\parallel} 有着不可忽略的影响,图 2 给出了裂纹长度比 a/W 对 Y_{\perp} 、 Y_{\parallel} 的影响规律。显然,当裂纹长度比 a/W 很小时, Y_{\perp} 、 Y_{\parallel} 均接近于 1,此时可将裂隙岩石作为无限大体进行断裂分析;随着裂纹长度比 a/W 的增加, Y_{\perp} 、 Y_{\parallel} 非线性单调递增,且 Y_{\perp} 、 Y_{\parallel} 关于 a/W 的二次导数均大于 0。

4 岩石拉伸断裂破坏的理论分析

有关岩石的拉伸试验方法还没有标准化,目前一

表 1 $a/W=0.25$ 时,不同倾角的 Y_{\perp} 、 Y_{\parallel} 值

Table 1 $a/W=0.25$,the values of Y_{\perp} , Y_{\parallel} for different orientation angles

角度 / (°)	0	12.5	24	29	38	45	52	61	66	77.5	84	90
Y_{\perp}	1.086	1.086	1.084	1.083	1.081	1.079	1.077	1.075	1.073	1.072	1.071	*
Y_{\parallel}	*	1.065	1.064	1.063	1.061	1.059	1.057	1.054	1.053	1.051	1.050	*

注: * 表示没有意义。

表 2 $a/W=0.49$ 时,不同倾角的 Y_{\perp} 、 Y_{\parallel} 值

Table 2 $a/W=0.49$,the values of Y_{\perp} , Y_{\parallel} for different orientation angles

角度 / (°)	0	12.5	24	29	38	45	52	61	66	77.5	84	90
Y_{\perp}	1.321	1.324	1.328	1.328	1.327	1.324	1.321	1.320	1.322	1.327	1.329	*
Y_{\parallel}	*	1.210	1.214	1.224	1.228	1.224	1.218	1.210	1.207	1.203	1.203	*

注: * 表示没有意义。

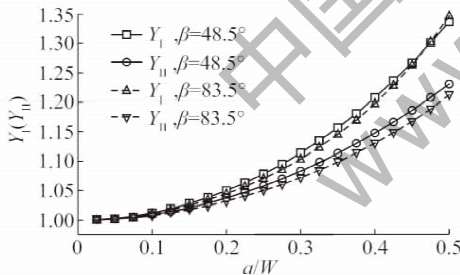


图 2 无量纲系数 Y_{\perp} (Y_{\parallel}) 与 a/W 的关系

Fig. 2 Relationship between dimensionless coefficient Y_{\perp} (Y_{\parallel}) and a/W

般采用巴西劈裂试验和直接拉伸试验。巴西劈裂试验可以得到完整岩石的抗拉强度,却较难得到裂隙岩石的抗拉强度。需要注意的是,尽管直接拉伸试验面临着可能出现弯曲力矩的影响,但要想得到裂隙岩石的抗拉强度,直接拉伸试验无疑是最好的选择。图 1 所示的岩样材料泊松比为 0.25,裂纹倾角为 β ,长度为 $2a$,并视其为平面应力问题。

4.1 岩石试件裂纹开裂角分析

文献 [11] 认为无限大体的 I-II 型复合裂纹的开裂角 $\theta_0 < 0$, 因此满足应力分析的分支为

$$\theta_0 = 2 \arctan \frac{1 - \sqrt{1 + 8 (K_{II0}/K_{I0})^2}}{4K_{II}/K_I} \quad (27)$$

基于最大周向应力理论的有限大体的脆性断裂准则认为开裂角可由式 (2) 决定,将其写成显式形式

$$\theta_0 = 2 \arctan \frac{1 - \sqrt{1 + 8 \tan^2 \beta (Y_{II}/Y_I)^2}}{4 \tan \beta Y_{II}/Y_I} \quad (28)$$

重写文献 [10] 基于有效应力的无限大体开裂角方程

$$K_{I0} (\sin 2\theta - \xi \sin \theta) + 2K_{I0}K_{II0} (2 \cos 2\theta - \xi \cos \theta) + K_{II0}^2 (\xi \sin \theta - 3 \sin 2\theta) = 0 \quad (29)$$

基于有效应力理论的有限大体开裂角方程见式 (9), 尽管式 (9) 和式 (29) 不能表示成 θ_0 的显式形式,但可以使用数值的办法求解。以下讨论中取开裂角 θ_0 的绝对值,正方向为沿裂纹尖端的顺时针方向。

图 3 给出了裂纹倾角 β 对开裂角 θ_0 的影响,总体来说: ① 开裂角 θ_0 随裂纹倾角 β 非线性单调递增,且 $d^2\theta_0/d\beta^2 < 0$; ② 4 个公式计算的开裂角又以无限大体的有效应力理论计算结果最大; ③ 基于最大周向应力理论计算的开裂角最大值为 70.5° 。基于有效应力

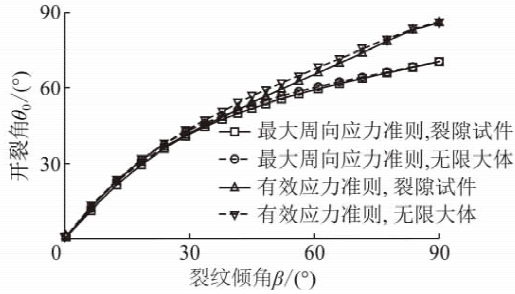


图 3 初裂角 θ_0 与裂纹倾角 β 的关系 ($a/W=0.49$)

Fig. 3 Relationship between fracture angle θ_0 and orientation angle ($a/W=0.49$)

理论计算的最大开裂角度约为 86° (与材料泊松比有关) 两者出现这么大的差距是由于采用了不同的假设所致; ④ 基于最大周向应力(有效应力)理论在实

验室尺度下计算的开裂角要大于在无限大体尺度下计算的开裂角。

表 3 给出了裂隙长度比 a/W 对开裂角 θ_0 的影响, 可以看出, 对于具有宏观裂隙的试件, 基于最大周向应力理论计算的开裂角和基于有效应力理论计算的开裂角均有随裂隙的长度比 a/W 增加而递减的趋势。由于按照无限大体的最大周向应力理论和有效应力理论计算的开裂角仅与裂隙倾角有关, 与裂隙长度无关, 这就导致了随着裂隙长度的增加使用无限大体的计算结果与真实的裂隙开裂角之间的误差越来越大。当 a/W 很小时, 例如表 3 所列出的 $a/W=0.1$ 则可将裂隙试件视为成无限大体进行分析, 这与工程经验是一致的。

表 3 开裂角 θ_0 与裂纹长度 a/W 的关系

Table 3 Relationship between fracture angle θ_0 and crack length ratio a/W

($^\circ$)

a/W	最大周向应力理论($\beta=48.5^\circ$)		有效应力理论($\beta=48.5^\circ$)		最大周向应力理论($\beta=83.5^\circ$)		有效应力理论($\beta=83.5^\circ$)	
	试件	无限大体	试件	无限大体	试件	无限大体	试件	无限大体
0.1	54.815	54.857	58.147	59.137	68.415	68.422	83.435	83.476
0.3	54.461	54.857	57.636	59.137	68.360	68.422	83.322	83.476
0.5	53.659	54.857	56.522	59.137	68.189	68.422	82.976	83.476

4.2 岩石试件抗拉断能力分析

事实上, 工程人员通常希望知道在某一裂隙长度、倾角时, 裂隙岩石的抗拉强度值, 因此, 研究实验室尺度下抗拉强度 R_t 与裂隙长度 a 、倾角 β 的相关规律至关重要。

需要注意的是, 需要找到一个无量纲量来衡量裂隙岩石的抗拉强度的大小, 且其与断裂韧度无关, 与裂隙几何性态(倾角和长度)有关; 其与对应的材料和几何参数的乘积即为相应的抗拉强度值。研究这个量的好处: 避免了研究裂隙岩石试件的抗拉强度

R_t 与裂隙长度 a 、倾角 β 的相关规律时由于材料不同而结果不同的问题。

根据以上分析, 定义基于最大周向应力理论的有限大体的抗拉断能力 $f_1(a, \beta)$, 即

$$f_1(a, \beta) = \frac{R_t}{K_{Ic}\sqrt{W}} = \frac{1}{\sqrt{\pi a/W} \cos \beta (\lambda_1 \cos \beta + \lambda_2 \sin \beta)} \quad (30)$$

据文献 [11] 可得到基于最大周向应力理论的无限大体的抗拉断能力 $f_2(a, \beta)$:

$$f_2(a, \beta) = \frac{R_t}{K_{Ic}\sqrt{W}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi a/W}}{4} \cos \frac{\theta_0}{2} [(1 + \cos \theta_0)(1 - \cos 2\beta) - 3 \sin \theta_0 \sin 2\beta]} \quad (31)$$

同理, 定义基于有效应力理论的有限大体的抗拉断能力 $g_1(a, \beta)$:

$$g_1(a, \beta) = \frac{R_t}{K_{Ic}\sqrt{W}} = \frac{1}{\sqrt{\pi a/W} \cos \beta \sqrt{c_{11} \cos^2 \beta + c_{12} \sin 2\beta + c_{22} \sin^2 \beta}} \quad (32)$$

$$g_2(a, \beta) = \frac{R_t}{K_{Ic}\sqrt{W}} = \frac{1}{\sqrt{\pi a/W} \cos \beta \sqrt{\lambda_{11} \cos^2 \beta + \lambda_{12} \sin 2\beta + \lambda_{22} \sin^2 \beta}} \quad (33)$$

据文献 [10], 可得到基于有效应力理论的无限大体的抗拉断能力 $g_2(a, \beta)$:

$$g_2(a, \beta) = \frac{R_t}{K_{Ic}\sqrt{W}} = \frac{1}{\sqrt{\pi a/W} \cos \beta \sqrt{c_{11} \cos^2 \beta + c_{12} \sin 2\beta + c_{22} \sin^2 \beta}} \quad (33)$$

式中 $c_{ij} = 3b_{ij}/4$ 。

注意到以上 4 个公式右端的具体形式, 显然式 (30) ~ (33) 即为满足要求的无量纲量。

图 4 给出了式 (30) ~ (33) 定义的抗断裂能力与裂隙倾角的关系, 可见四者整体上均随裂纹倾角的增

大而增大,尤其当 $\beta \in (60^\circ, 90^\circ)$ 时,抗断裂能力随倾角的增大显著提高。其中,基于有效应力理论的有限大体(无限大体)的抗拉伸断裂能力 $g_i(a, \beta)$ 要略高于基于最大周向应力理论的有限大体(无限大体)的抗脆断能力 $f_i(a, \beta)$ 。当裂隙倾角 $\beta = \pi/2$ 时,按照计算结果 $f_i(a, \beta)$ 、 $g_i(a, \beta)$ 均趋于 ∞ ,但并不代表当裂隙与轴向拉力平行时岩石试件的拉伸强度为 ∞ ,它的极限值应为完整岩样的抗拉强度 R_0 ; 当 $\beta \in (0, 60^\circ)$ 时,裂隙的存在极大地降低了岩石的拉伸强度,这对于存在受拉岩石的工程来讲极为不利。比较 $f_1(a, \beta)$ 与 $f_2(a, \beta)$ 、 $g_1(a, \beta)$ 与 $g_2(a, \beta)$ 不难发现,使用无限大体的最大周向应力理论和有效应力理论计算的抗断裂能力均较实验室尺度下的结果更高,若按此结果进行工程设计则会导致工程安全储备不足,这一点需要密切注意。

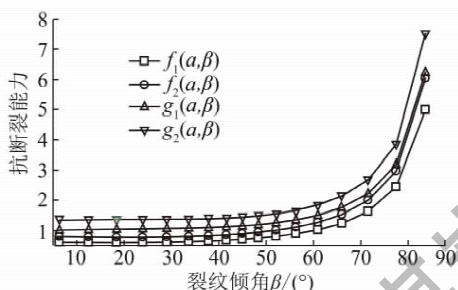


图4 抗断能力与裂纹倾角 β 的关系

Fig. 4 Relationship between fracture-resisting ability and orientation angle β

当裂隙倾角 β 保持不变时,图5给出了抗断裂能力与裂隙长度的关系。可以看出:①裂隙长度的增加会较大程度地削弱岩石的抗拉强度;②当裂隙长度比 $a/W \in (0, 0.2)$,裂隙岩石的抗断裂能力下降幅度很大;③比较 $f_1(a, \beta)$ 与 $f_2(a, \beta)$ 、 $g_1(a, \beta)$ 与 $g_2(a, \beta)$,仍得到“使用无限大体的最大周向应力理论和有效应力理论计算的抗断裂能力均较实验室尺度下的相应结果更高”的结论。

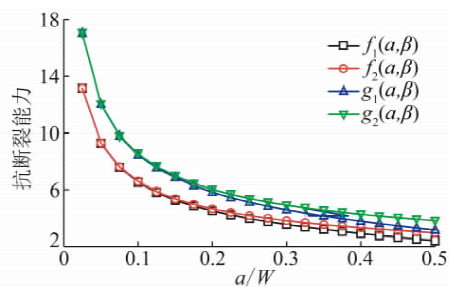


图5 抗断能力与裂纹长度比 a/W 的关系

Fig. 5 Relationship between fracture-resisting ability and crack length ratio a/W ($\beta = 77.5^\circ$)

为了把握有限大体和无限大体两种理论在实验

室的应用范围以及更好地说明试件尺度对岩石试件抗拉断能力的影响,这里定义两个变量 δ_1 、 δ_2 ,即

$$\delta_1 = \frac{f_2(a, \beta) - f_1(a, \beta)}{f_1(a, \beta)} \times 100 \quad (34)$$

$$\delta_2 = \frac{g_2(a, \beta) - g_1(a, \beta)}{g_1(a, \beta)} \times 100 \quad (35)$$

这里认为式(30)、(32)的结果为真值。

图6给出了 δ_1 、 δ_2 与裂纹长度比 a/W 的关系,结合图5和图6分析可知,当裂纹角度一定时,裂纹与试件尺寸相比很小 ($a/W < 0.1$) 时,使用无限大体的理论计算的结果与按有限大体计算的结果具有很好的一致性。事实上,当 $a/W \ll 0.1$ 时, Y_I 、 Y_{II} 均接近于1,相关公式可退化成经典的裂隙体的抗拉强度公式。随着裂隙长度的增加,使用无限大体的理论计算结果与按有限大体破坏准则下的计算结果差异越来越大,当 $a/W = 0.49$ 时,误差可达23%,说明试件的尺度对裂隙岩石强度的影响不容小视,这与裂隙面贯通率越高强度越低的实践经验相吻合。同时,图5和图6还指出,使用基于有效应力理论计算的抗断裂能力偏高,这是由于考虑了裂纹尖端塑性区的影响,断裂前裂纹尖端产生较大的塑性区,使裂纹扩展阻力增大,提高了材料的断裂韧性。

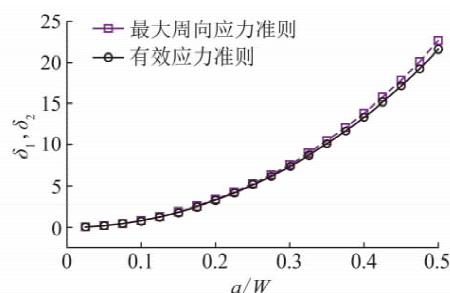


图6 δ_1 (δ_2) 与裂纹长度比 a/W 的关系

Fig. 6 Relationship between δ_1 (δ_2) and crack length ratio a/W ($\beta = 77.5^\circ$)

5 结 论

(1) 通过边界配置法对最大周向应力理论、有效应力理论进行了修正,建立了实验室尺度下拉剪裂纹的两种破坏准则,并通过相应的破坏准则建立起了岩石单轴拉伸强度与断裂韧性之间的关系,使得采用传统的无限大体的裂纹尖端应力强度因子进行实验尺度下的裂隙岩石的抗拉强度估计以及破坏分析成为现实。

(2) 讨论了裂纹倾角、裂纹长度对开裂角的影响,得出了开裂角随裂纹倾角的增大而增大的结论;对于具有宏观裂隙的试件,基于最大周向应力理论计算的开裂角和基于有效应力理论计算的开裂角随裂

隙长度增加有逐渐递减的趋势; 基于最大周向应力理论计算的开裂角最大值为 70.5° , 基于有效应力理论计算的最大开裂角度约为 86° ; 一般情况下试件尺度下计算的开裂角要大于在无限大体尺度下计算的开裂角。

(3) 找到了可以衡量裂隙岩石试件抗拉强度强弱的无量纲量, 即 $f_1(a, \beta)$ 与 $f_2(a, \beta)$ 、 $g_1(a, \beta)$ 与 $g_2(a, \beta)$, 并分析了裂纹倾角、裂纹长度对裂隙岩样的抗断裂能力的影响, 分析指出: 裂隙岩石的抗断裂能(抗拉强度)随裂纹倾角的增大而增大, 尤其当 $\beta \in (60^\circ, 90^\circ)$ 时, 抗断裂能力随倾角的增大显著提高; 当裂纹半长与试件宽度(直径)比 $a/W < 0.1$ 时, 裂隙试样的抗断裂能力可按无限大体理论进行计算; 随着裂隙长度的增加, 使用无限大体的理论计算结果与按有限大体的计算结果差异越来越大, 当 $a/W = 0.49$, 也即裂纹长度与试件宽度比为 0.49 时, 误差即达 23%, 说明试件的尺度对裂隙岩石强度的影响不容忽视, 这与裂隙面贯通率越高强度越低的实验经验相吻合。

(4) 基于有效应力理论计算的抗断裂能力(抗拉强度)偏高, 这是由于考虑了裂纹尖端塑性区的影响。

参考文献:

- [1] 徐志英. 岩石力学(第三版) [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2008.
Xu Zhiying. Rock mechanics (third edition) [M]. Beijing: China Water Power Press, 2008.
- [2] Zhu Z M, Wang L G, Bibhu Mohanty, et al. Stress intensity factor for a cracked specimen under compression [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2006, 73(4): 482-489.
- [3] Zhu Z M, Ji S, Xie H. An improved method of collocation for the problem of crack surface subjected to uniform load [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1996, 54(5): 731-741.
- [4] Zhu Z M, Xie H, Ji S. The mixed boundary problems for a mixed mode crack in a finite plate [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1997, 56(5): 647-655.
- [5] Zhu Z M. An alternative form of propagation criterion for two collinear cracks under compression [J]. Mathematics and Mechanics of Solids, 2009, 14: 727-746.
- [6] Zhu Z M. New biaxial failure criterion for brittle materials in compression [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(11): 1251-1258.
- [7] Xie H, Zhu Z M, Fan T. The analysis of rock fracture characteristics by using boundary collocation method [J]. Acta Mech Sinica, 1998, 30: 238-246.
- [8] 李碧勇, 朱哲明, 王蒙, 等. 有限板内偏心裂纹应力强度因子的边界配置法分析 [J]. 四川大学学报(工程科学版), 2010, 42(9): 59-63.
Li Biyong, Zhu Zheming, Wang Meng, et al. Analysis of the stress intensity factor of a finite plate with an eccentric crack by boundary collocation method [J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2010, 42(9): 59-63.
- [9] 王元汉, 徐钺, 谭国焕, 等. 岩体断裂的破坏机理与计算模拟 [J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(4): 449-452.
Wang Yuanhan, Xu Yue, Tan Guohuan, et al. Fracture mechanism and calculation of rock fracture [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, 19(4): 449-452.
- [10] 赵治枢. 复合型裂纹扩展的有效应力准则 [J]. 机械强度, 1992, 11(2): 51-53.
Zhao Yishu. The effective stress criteria for mixed crack's extension [J]. Journal of Mechanical Strength, 1992, 11(2): 51-53.
- [11] 李世愚, 和泰名, 尹祥础. 岩石断裂力学导论 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010: 176-178.
Li Shiyu, He Taiming, Yin Xiangchu. Introduction of rock fracture mechanics [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2010: 176-178.
- [12] 黎在良, 王元汉, 李廷芥. 断裂力学中的边界数值方法 [M]. 北京: 地震出版社, 1996: 22-39.
Li Zailiang, Wang Yuanhan, Li Tingjie. The methods of boundary numerical calculation in fracture mechanics [M]. Beijing: Seismological Press, 1996: 22-39.
- [13] Muskhelishvili N I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity [M]. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1975.