

塑料板夹层双层井壁的轴对称变形分析

周 扬^{1,2} 周国庆^{1,2}

(1. 中国矿业大学 深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 江苏 徐州 221008; 2. 中国矿业大学 力学与建筑工程学院, 江苏 徐州 221116)

摘 要: 针对特殊地层中的塑料板夹层双层井壁结构, 应用空间轴对称问题的弹性理论建立了相应的受力分析方法。综合运用线性叠加原理、弹性通解、Fourier 方法等理论, 获得了该双层井壁在一般荷载条件下的一组圣维南解。通过算例分析了内壁、外壁厚度的改变对井壁环向、径向及轴向正应力的影响, 并利用第四强度理论分析了立井安全性的变化。结果表明: 仅增加内壁厚度对井筒内、外壁安全性的提高均不显著; 仅增加外壁厚度对井筒内壁安全性的改善较小, 但对于井筒薄弱环节外壁安全性的提高则较为显著。

关键词: 双层井壁; 特殊地层; 弹性分析; Fourier 方法

中图分类号: TD262 **文献标志码:** A

Axisymmetric deformation analysis for the double layer shaft with a plastic interlayer

ZHOU Yang^{1,2} ZHOU Guo-qing^{1,2}

(1. State Key Laboratory for Geomechanics and Deep Underground Engineering, China University of Mining & Technology, Xuzhou 221008, China; 2. School of Mechanics & Civil Engineering, China University of Mining & Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: For the double layer shaft with a plastic interlayer in special stratum, the mechanical analysis method was established based on the three dimensional axisymmetric elastic theory. A Saint-Venant solution was obtained for the double layer shaft under arbitrary stress boundary conditions by applying linear principle, general elastic solution and Fourier method. The effects of the inside lining thickness and the outside lining thickness on the stresses and the security of the shaft were studied. The results indicate that the security improvement of the shaft linings induced by the increase of the inside lining thickness is small; the outside lining, which is the fragile area of the shaft, can be greatly improved by the increase of the outside lining thickness.

Key words: double layer shaft; special stratum; elastic analysis; Fourier method

经过对华东地区立井井壁破裂机理的多年研究, 学者们提出了不同的假说, 其中的附加力理论得到了业内专家的认可。该理论可以表述为: 特殊地层中含水层因为开采等活动而疏水, 造成水位下降, 土层固结压缩, 引起上覆土体下沉, 土体在沉降过程中将施加于井壁外表面一个附加力系, 当该力增长到一定值时, 井壁因不能承受而产生破坏^[1-5]。

在这些特殊地层中, 一种塑料板夹层双层井壁结构应用较多, 文献 [6-7] 利用双重级数展开法对该

井壁结构进行过力学分析, 但其解答没有考虑井壁自重, 文献 [6] 未考虑端部边界条件, 文献 [7] 给出的端部正应力不能满足自平衡条件, 更重要的是文献 [6-7] 将函数在不完备的 Fourier - Bessel 级数 $\Phi_0(\beta_m r)$ 上展开是不正确的^[8], 因此有必要对该问题进行新的建模与分析。

本文针对特殊地层中的塑料板夹层双层井壁, 以空间轴对称问题 Timpe 通解中的单重级数展开法^[9]为基础, 建立该井壁在一般荷载条件下的应力分析方

法 获得一组圣维南解 并进行算例分析。

1 基本条件

图1为该双层井壁结构受力示意,在实际施工过程中,塑料板是固定在外壁内表面上的,同时考虑到塑料板较薄,因此在力学建模时只考虑内、外两层井壁。

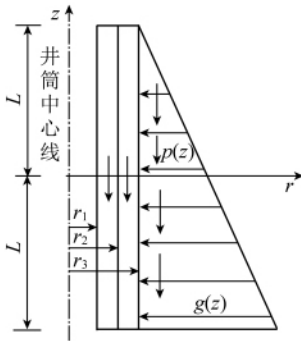


图1 双层井壁受力示意

Fig.1 Double layer shaft lining under force

井筒将受到外侧水平方向的土压力。在特殊地层中,施工完成后的井筒自重不再由土层摩擦力分担,因此井壁将受到自重作用,同时还将受到外侧竖直附加力作用。井筒下端坐落在基岩上,因而会受到基岩作用的端部力。

内、外壁之间的塑料板夹层作用之一是让内、外壁处于可滑动状态,考虑到塑料板很软且表面较光滑,参考文献[6-7]将内外壁之间的接触近似为光滑接触。

在图1所示的坐标系中,边界条件可以表示为

$$\begin{cases} r = r_1: \sigma_r^{(1)} = 0, \tau_{rz}^{(1)} = 0 \\ r = r_2: \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}, \mu^{(1)} = u^{(2)}, \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0 \\ r = r_3: \sigma_r^{(2)} = g(z), \tau_{rz}^{(2)} = p(z) \\ z = L: \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} = 0, \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0 \\ z = -L: \sigma_z^{(1)} = M_1(r), \sigma_z^{(2)} = M_2(r), \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中 $g(z)$ 和 $p(z)$ 分别为侧向土压力、竖直附加力; $M_1(r)$ 、 $M_2(r)$ 为井筒下端部受到的基岩反力,该力使得井筒处于平衡状态,实际上,当获得一组考虑自重,满足内外侧面及上端部边界的平衡解答后,井筒下端部边界必然在圣维南意义下满足^[9],因而该力未在图1中标出;上标“(1)”、“(2)”分别表示在内、外壁中。

式(1)中相应应力边界可以展开为 Fourier 级数,

即

$$\begin{cases} g(z) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_{nc} \cos \frac{n\pi z}{L} + g_{ns} \sin \frac{n\pi z}{L} \right) \\ p(z) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p_{nc} \cos \frac{n\pi z}{L} + p_{ns} \sin \frac{n\pi z}{L} \right) \end{cases} \quad (2)$$

式中 g_0 、 p_0 分别为应力边界函数 $g(z)$ 、 $p(z)$ 的 Fourier 级数的常数项部分; g_{nc} 、 g_{ns} 、 p_{nc} 、 p_{ns} 分别为其 Fourier 级数的第 n 项正弦及余弦系数。

对于图1所示的力学问题,根据线性叠加原理,可以分解为以下3个子问题。

(1) 重力作用下满足内外壁接触条件的一组特解,容易给出如下一组。

$$\begin{cases} \sigma_r^{(1)} = \left[\frac{ar_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} - \frac{ar_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{r^2} \right] (L - z) \\ \sigma_\theta^{(1)} = \left[\frac{ar_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{ar_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{r^2} \right] (L - z) \\ \sigma_z^{(1)} = \gamma_1 (z - L) \\ \tau_{rz}^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sigma_r^{(2)} = \left[\frac{-ar_2^2}{(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{ar_2^2 r_3^2}{(r_3^2 - r_2^2)} \frac{1}{r^2} \right] (L - z) \\ \sigma_\theta^{(2)} = \left[\frac{-ar_2^2}{(r_3^2 - r_2^2)} - \frac{ar_2^2 r_3^2}{(r_3^2 - r_2^2)} \frac{1}{r^2} \right] (L - z) \\ \sigma_z^{(2)} = \gamma_2 (z - L) \\ \tau_{rz}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中,

$$a = \frac{(\mu^{(2)} \gamma^{(2)} / E^{(2)} - \mu^{(1)} \gamma^{(1)} / E^{(1)})}{\frac{r_2^2 + r_1^2}{E^{(1)}(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_2^2 + r_3^2}{E^{(2)}(r_3^2 - r_2^2)} - \frac{\mu^{(1)}}{E^{(1)}} + \frac{\mu^{(2)}}{E^{(2)}}}$$

其中 μ 、 E 、 γ 分别为材料泊松比、弹性模量及容重。该组特解内外侧面均不受力,内、外壁在上端部也不受力。

(2) 三角级数和部分侧面边界特解。

该组特解满足式(2)中三角级数和部分外侧面边界,其内侧面不受力,同时还将满足内外壁的接触条件。

(3) 常外侧力与均布端部力作用下的解答。

前两组解答均为特解,对端部受力没有预先限制,第3个子问题的目的是使得3组解答叠加后成为1组圣维南解,利用叠加后上端部静力等效为0有

$$\begin{cases} N_{13} \pi (r_2^2 - r_1^2) + \int_{r_1}^{r_2} N_{12}(r) 2\pi r dr = 0 \\ N_{23} \pi (r_3^2 - r_2^2) + \int_{r_2}^{r_3} N_{22}(r) 2\pi r dr = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中 N_{13} (N_{12})、 N_{23} (N_{22}) 分别为第 3 (2) 个子问题内、外壁上端部正应力,由式 (5) 推导得到

$$\begin{cases} N_{13} = - \int_{r_1}^{r_2} N_{12}(r) 2\pi r dr / [\pi(r_2^2 - r_1^2)] \\ N_{23} = - \int_{r_2}^{r_3} N_{22}(r) 2\pi r dr / [\pi(r_3^2 - r_2^2)] \end{cases} \quad (6)$$

该组解答在外侧受到均布正应力 g_0 , 均布剪应力 p_0 , 内侧不受力, 上端部受到均布正应力 N_{13} 与 N_{23} , 同时还需要满足内外壁接触条件。

2 问题的求解

2.1 三角级数和部分侧面边界特解

空间轴对称问题的 Timpe 通解^[10]为

$$\begin{cases} u = T^* - \frac{1}{4(1-\mu)} \frac{\partial(T_0 + rT^*)}{\partial r} \\ w = -\frac{1}{4(1-\mu)} \frac{\partial(T_0 + rT^*)}{\partial z} \end{cases} \quad (7)$$

其中 T^* 、 T_0 满足:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - 1/r^2) T^*(r, z) &= 0 \\ \nabla^2 T_0(r, z) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_r^{(i)}}{2G^{(i)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n z) [A_n^{*(i)} a_{nm1}^{*(i)}(r) + C_n^{*(i)} a_{nm3}^{*(i)}(r) + A_n^{0(i)} a_{nm1}^{0(i)}(r) + C_n^{0(i)} a_{nm3}^{0(i)}(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n z) [B_n^{*(i)} a_{nm2}^{*(i)}(r) + D_n^{*(i)} a_{nm4}^{*(i)}(r) + B_n^{0(i)} a_{nm2}^{0(i)}(r) + D_n^{0(i)} a_{nm4}^{0(i)}(r)] \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_z^{(i)}}{2G^{(i)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n z) [A_n^{*(i)} a_{zn1}^{*(i)}(r) + C_n^{*(i)} a_{zn3}^{*(i)}(r) + A_n^{0(i)} a_{zn1}^{0(i)}(r) + C_n^{0(i)} a_{zn3}^{0(i)}(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n z) [B_n^{*(i)} a_{zn2}^{*(i)}(r) + D_n^{*(i)} a_{zn4}^{*(i)}(r) + B_n^{0(i)} a_{zn2}^{0(i)}(r) + D_n^{0(i)} a_{zn4}^{0(i)}(r)] \quad (11)$$

$$\frac{\tau_{rz}^{(i)}}{G^{(i)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n z) [B_n^{*(i)} b_{n2}^{*(i)}(r) + D_n^{*(i)} b_{n4}^{*(i)}(r) + B_n^{0(i)} b_{n2}^{0(i)}(r) + D_n^{0(i)} b_{n4}^{0(i)}(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n z) [A_n^{*(i)} b_{n1}^{*(i)}(r) + C_n^{*(i)} b_{n3}^{*(i)}(r) + A_n^{0(i)} b_{n1}^{0(i)}(r) + C_n^{0(i)} b_{n3}^{0(i)}(r)] \quad (12)$$

$$u^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n z) [B_n^{*(i)} c_{n2}^{*(i)}(r) + D_n^{*(i)} c_{n4}^{*(i)}(r) + B_n^{0(i)} c_{n2}^{0(i)}(r) + D_n^{0(i)} c_{n4}^{0(i)}(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n z) [A_n^{*(i)} c_{n1}^{*(i)}(r) + C_n^{*(i)} c_{n3}^{*(i)}(r) + A_n^{0(i)} c_{n1}^{0(i)}(r) + C_n^{0(i)} c_{n3}^{0(i)}(r)] \quad (13)$$

其中 G 为剪切模量, 参数函数 $a(r) \sim b(r)$ 已经在文献 [9] 中给出, 不再赘述。对于 $c(r)$ 系列则有

$$\begin{aligned} c_{n1}^{*(i)}(r) &= c_{n2}^{*(i)}(r) = I_1(\alpha_n r) + \alpha_n r I_0(\alpha_n r) / (4\mu^{(i)} - 4) \\ c_{n1}^{0(i)}(r) &= c_{n2}^{0(i)}(r) = \alpha_n I_1(\alpha_n r) / (4\mu^{(i)} - 4) \\ c_{n3}^{*(i)}(r) &= c_{n4}^{*(i)}(r) = K_1(\alpha_n r) - \alpha_n r K_0(\alpha_n r) / (4\mu^{(i)} - 4) \\ c_{n3}^{0(i)}(r) &= c_{n4}^{0(i)}(r) = -\alpha_n K_1(\alpha_n r) / (4\mu^{(i)} - 4) \end{aligned}$$

利用内侧面的边界条件可以得到

$$A_n^{*(1)} a_{nm1}^{*(1)}(r_1) + C_n^{*(1)} a_{nm3}^{*(1)}(r_1) + A_n^{0(1)} a_{nm1}^{0(1)}(r_1) + C_n^{0(1)} a_{nm3}^{0(1)}(r_1) = 0$$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为轴对称调和算子; u 、 w 分别为径向、轴向位移。

采用分离变量法求解 T^* 、 T_0 , 选择如下级数形式的位移函数(内外壁中选择相同的形式):

$$T_n^{*(i)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} I_1(\alpha_n r) [A_n^{*(i)} \sin(\alpha_n z) + B_n^{*(i)} \cos(\alpha_n z)] + K_1(\alpha_n r) [C_n^{*(i)} \sin(\alpha_n z) + D_n^{*(i)} \cos(\alpha_n z)] \quad (8)$$

$$T_n^{0(i)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} I_0(\alpha_n r) [A_n^{0(i)} \sin(\alpha_n z) + B_n^{0(i)} \cos(\alpha_n z)] + K_0(\alpha_n r) [C_n^{0(i)} \sin(\alpha_n z) + D_n^{0(i)} \cos(\alpha_n z)] \quad (9)$$

式中, $\alpha_n = n\pi/L$, $n = 1, 2, 3, \dots$; 而 $A_n^{*(i)}$ 、 $B_n^{*(i)}$ 、 $C_n^{*(i)}$ 、 $D_n^{*(i)}$ 、 $A_n^{0(i)}$ 、 $B_n^{0(i)}$ 、 $C_n^{0(i)}$ 、 $D_n^{0(i)}$ 为待定系数, 通过边界、接触条件来确定, 上标 i 在内外壁中分别为“1”、“2”; I_0 、 I_1 、 K_0 、 K_1 分别为零阶、一阶第一、二类变形 Bessel 函数。

将式 (8)、(9) 代入式 (7), 并利用几何方程、本构关系可以得到(主要列出与建立方程有关的量)

$$\begin{aligned}
 B_n^{*(1)} a_{r2}^{*(1)}(r_1) + D_n^{*(1)} a_{r4}^{*(1)}(r_1) + B_n^{0(1)} a_{r2}^{0(1)}(r_1) + D_n^{0(1)} a_{r4}^{0(1)}(r_1) &= 0 \\
 A_n^{*(1)} b_{n1}^{*(1)}(r_1) + C_n^{*(1)} b_{n3}^{*(1)}(r_1) + A_n^{0(1)} b_{n1}^{0(1)}(r_1) + C_n^{0(1)} b_{n3}^{0(1)}(r_1) &= 0 \\
 B_n^{*(1)} b_{n2}^{*(1)}(r_1) + D_n^{*(1)} b_{n4}^{*(1)}(r_1) + B_n^{0(1)} b_{n2}^{0(1)}(r_1) + D_n^{0(1)} b_{n4}^{0(1)}(r_1) &= 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

利用外侧面的边界条件可以得到

$$\begin{aligned}
 A_n^{*(2)} a_{r1}^{*(2)}(r_3) + C_n^{*(2)} a_{r3}^{*(2)}(r_3) + A_n^{0(2)} a_{r1}^{0(2)}(r_3) + C_n^{0(2)} a_{r3}^{0(2)}(r_3) &= g_{ns}/2G^{(2)} \\
 B_n^{*(2)} a_{r2}^{*(2)}(r_3) + D_n^{*(2)} a_{r4}^{*(2)}(r_3) + B_n^{0(2)} a_{r2}^{0(2)}(r_3) + D_n^{0(2)} a_{r4}^{0(2)}(r_3) &= g_{nc}/2G^{(2)} \\
 A_n^{*(2)} b_{n1}^{*(2)}(r_3) + C_n^{*(2)} b_{n3}^{*(2)}(r_3) + A_n^{0(2)} b_{n1}^{0(2)}(r_3) + C_n^{0(2)} b_{n3}^{0(2)}(r_3) &= p_{nc}/G^{(2)} \\
 B_n^{*(2)} b_{n2}^{*(2)}(r_3) + D_n^{*(2)} b_{n4}^{*(2)}(r_3) + B_n^{0(2)} b_{n2}^{0(2)}(r_3) + D_n^{0(2)} b_{n4}^{0(2)}(r_3) &= p_{ns}/G^{(2)}
 \end{aligned} \tag{15}$$

利用内外壁交界面上接触条件可以得到

$$\left\{ \begin{aligned}
 &A_n^{*(1)} b_{n1}^{*(1)}(r_2) + C_n^{*(1)} b_{n3}^{*(1)}(r_2) + A_n^{0(1)} b_{n1}^{0(1)}(r_2) + C_n^{0(1)} b_{n3}^{0(1)}(r_2) = 0 \\
 &B_n^{*(1)} b_{n2}^{*(1)}(r_2) + D_n^{*(1)} b_{n4}^{*(1)}(r_2) + B_n^{0(1)} b_{n2}^{0(1)}(r_2) + D_n^{0(1)} b_{n4}^{0(1)}(r_2) = 0 \\
 &A_n^{*(2)} b_{n1}^{*(2)}(r_2) + C_n^{*(2)} b_{n3}^{*(2)}(r_2) + A_n^{0(2)} b_{n1}^{0(2)}(r_2) + C_n^{0(2)} b_{n3}^{0(2)}(r_2) = 0 \\
 &B_n^{*(2)} b_{n2}^{*(2)}(r_2) + D_n^{*(2)} b_{n4}^{*(2)}(r_2) + B_n^{0(2)} b_{n2}^{0(2)}(r_2) + D_n^{0(2)} b_{n4}^{0(2)}(r_2) = 0 \\
 &2G^{(1)} [A_n^{*(1)} a_{r1}^{*(1)}(r_2) + C_n^{*(1)} a_{r3}^{*(1)}(r_2) + A_n^{0(1)} a_{r1}^{0(1)}(r_2) + C_n^{0(1)} a_{r3}^{0(1)}(r_2)] = \\
 &\quad 2G^{(2)} [A_n^{*(2)} a_{r1}^{*(2)}(r_2) + C_n^{*(2)} a_{r3}^{*(2)}(r_2) + A_n^{0(2)} a_{r1}^{0(2)}(r_2) + C_n^{0(2)} a_{r3}^{0(2)}(r_2)] \\
 &2G^{(1)} [B_n^{*(1)} a_{r2}^{*(1)}(r_2) + D_n^{*(1)} a_{r4}^{*(1)}(r_2) + B_n^{0(1)} a_{r2}^{0(1)}(r_2) + D_n^{0(1)} a_{r4}^{0(1)}(r_2)] = \\
 &\quad 2G^{(2)} [B_n^{*(2)} a_{r2}^{*(2)}(r_2) + D_n^{*(2)} a_{r4}^{*(2)}(r_2) + B_n^{0(2)} a_{r2}^{0(2)}(r_2) + D_n^{0(2)} a_{r4}^{0(2)}(r_2)] \\
 &B_n^{*(1)} c_{n2}^{*(1)}(r_2) + D_n^{*(1)} c_{n4}^{*(1)}(r_2) + B_n^{0(1)} c_{n2}^{0(1)}(r_2) + D_n^{0(1)} c_{n4}^{0(1)}(r_2) = B_n^{*(2)} c_{n2}^{*(2)}(r_2) + \\
 &\quad D_n^{*(2)} c_{n4}^{*(2)}(r_2) + B_n^{0(2)} c_{n2}^{0(2)}(r_2) + D_n^{0(2)} c_{n4}^{0(2)}(r_2) \\
 &A_n^{*(1)} c_{n1}^{*(1)}(r_2) + C_n^{*(1)} c_{n3}^{*(1)}(r_2) + A_n^{0(1)} c_{n1}^{0(1)}(r_2) + C_n^{0(1)} c_{n3}^{0(1)}(r_2) = A_n^{*(2)} c_{n1}^{*(2)}(r_2) + \\
 &\quad C_n^{*(2)} c_{n3}^{*(2)}(r_2) + A_n^{0(2)} c_{n1}^{0(2)}(r_2) + C_n^{0(2)} c_{n3}^{0(2)}(r_2)
 \end{aligned} \right. \tag{16}$$

式中 $n=1, 2, 3, \dots$

联立求解式 (14) ~ (16) 中的方程就可以获得式 (8) ~ (9) 中的待定系数, 将系数代入式 (10) ~ (13) 中即可获得三角级数和部分侧面边界的一组特解。

2.2 圣维南解的获得

对于第 3 个子问题, 在 Love 通解^[10]中选择应力函数为

$$\varphi^{(i)} = C_1^{(i)} z^3 + C_2^{(i)} zr^2 + C_3^{(i)} z \ln(r) + C_4^{(i)} (r^4 - 4z^2 r^2) + C_5^{(i)} (3z^2 r^2 - 2z^4) + C_6^{(i)} z^2 \ln(r) + C_7^{(i)} r^2 \ln(r) \tag{17}$$

于是可以得到(主要列出与建立方程有关的量)

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sigma_r^{(i)} &= 6\mu^{(i)} C_1^{(i)} + 2(2\mu^{(i)} - 1) C_2^{(i)} + C_3^{(i)} /r^2 + 2[8(1 - 2\mu^{(i)}) C_4^{(i)} - 6(1 + 2\mu^{(i)}) C_5^{(i)} + C_6^{(i)} /r^2]z \\
 \sigma_z^{(i)} &= 6(1 - \mu^{(i)}) C_1^{(i)} + 4(2 - \mu^{(i)}) C_2^{(i)} - 8[4(2 - \mu^{(i)}) C_4^{(i)} - 3\mu^{(i)} C_5^{(i)}]z \\
 \tau_{rz}^{(i)} &= 4[4(2 - \mu^{(i)}) C_4^{(i)} - 3\mu^{(i)} C_5^{(i)}]r - 2[\mu^{(i)} C_6^{(i)} - 2(1 - \mu^{(i)}) C_7^{(i)}] /r \\
 u^{(i)} &= -(2C_2^{(i)} r + C_3^{(i)} /r - 16C_4^{(i)} zr + 12C_5^{(i)} zr + 2zC_6^{(i)} /r) /2G^{(i)}
 \end{aligned} \right. \tag{18}$$

由井筒内、外侧面边界条件

$$\left\{ \begin{aligned}
 6\mu^{(1)} C_1^{(1)} + 2(2\mu^{(1)} - 1) C_2^{(1)} + C_3^{(1)} /r_1^2 &= 08(1 - 2\mu^{(1)}) C_4^{(1)} - 6(1 + 2\mu^{(1)}) C_5^{(1)} + C_6^{(1)} /r_1^2 = 0 \\
 4[4(2 - \mu^{(1)}) C_4^{(1)} - 3\mu^{(1)} C_5^{(1)}]r_1 - 2[\mu^{(1)} C_6^{(1)} - 2(1 - \mu^{(1)}) C_7^{(1)}] /r_1 &= 0 \\
 6\mu^{(2)} C_1^{(2)} + 2(2\mu^{(2)} - 1) C_2^{(2)} + C_3^{(2)} /r_3^2 &= g_0 \\
 8(1 - 2\mu^{(2)}) C_4^{(2)} - 6(1 + 2\mu^{(2)}) C_5^{(2)} + C_6^{(2)} /r_3^2 &= 0 \\
 4[4(2 - \mu^{(2)}) C_4^{(2)} - 3\mu^{(2)} C_5^{(2)}]r_3 - 2[\mu^{(2)} C_6^{(2)} - 2(1 - \mu^{(2)}) C_7^{(2)}] /r_3 &= p_0
 \end{aligned} \right. \tag{19}$$

由内外壁接触条件得到

$$\begin{cases} 4[4(2 - \mu^{(1)}) C_4^{(1)} - 3\mu^{(1)} C_5^{(1)}]r_2 - 2[\mu^{(1)} C_6^{(1)} - 2(1 - \mu^{(1)}) C_7^{(1)}]/r_2 = 0 \\ 4[4(2 - \mu^{(2)}) C_4^{(2)} - 3\mu^{(2)} C_5^{(2)}]r_2 - 2[\mu^{(2)} C_6^{(2)} - 2(1 - \mu^{(2)}) C_7^{(2)}]/r_2 = 0 \\ (2C_2^{(1)}r_2 + C_3^{(1)}/r_2)/2G^{(1)} = (2C_2^{(2)}r_2 + C_3^{(2)}/r_2)/2G^{(2)} \\ (-16C_4^{(1)}r_2 + 12C_5^{(1)}r_2 + 2C_6^{(1)}/r_2)/2G^{(1)} = (-16C_4^{(2)}r_2 + 12C_5^{(2)}r_2 + 2C_6^{(2)}/r_2)/2G^{(2)} \\ 6\mu^{(1)}C_1^{(1)} + 2(2\mu^{(1)} - 1)C_2^{(1)} + C_3^{(1)}/r_2^2 = 6\mu^{(2)}C_1^{(2)} + 2(2\mu^{(2)} - 1)C_2^{(2)} + C_3^{(2)}/r_2^2 \\ 8(1 - 2\mu^{(1)})C_4^{(1)} - 6(1 + 2\mu^{(1)})C_5^{(1)} + C_6^{(1)}/r_2^2 = 8(1 - 2\mu^{(2)})C_4^{(2)} - 6(1 + 2\mu^{(2)})C_5^{(2)} + C_6^{(2)}/r_2^2 \end{cases} \quad (20)$$

由内、外壁在上端部均布正应力条件为

$$\begin{cases} 6(1 - \mu^{(1)})C_1^{(1)} + 4(2 - \mu^{(1)})C_2^{(1)} - 8[4(2 - \mu^{(1)})C_4^{(1)} - 3\mu^{(1)}C_5^{(1)}]L = N_{13} \\ 6(1 - \mu^{(2)})C_1^{(2)} + 4(2 - \mu^{(2)})C_2^{(2)} - 8[4(2 - \mu^{(2)})C_4^{(2)} - 3\mu^{(2)}C_5^{(2)}]L = N_{23} \end{cases} \quad (21)$$

联立求解方程组(19)~(21)获得系数 $C_1^{(i)} \sim C_7^{(i)}$ 后代入式(18)便可以获得该子问题的解答。

3 个子问题的解答叠加后考虑了自重,满足内外侧面边界及上端部正应力条件,容易证明其下端部正应力条件必然在圣维南意义下满足^[9],而端部的剪应力在空间轴对称问题中均静力等效为 0,因此叠加后的解答是一组圣维南解。

3 算 例

3.1 基本条件

考虑 3 组塑料板夹层双层井壁结构,立井 1 号: $r_1 = 3.25 \text{ m}$, $r_2 = 3.95 \text{ m}$, $r_3 = 4.65 \text{ m}$; 立井 2 号: $r_1 = 3.25 \text{ m}$, $r_2 = 3.95 \text{ m}$, $r_3 = 4.45 \text{ m}$; 立井 3 号 $r_1 = 3.25 \text{ m}$, $r_2 = 3.75 \text{ m}$, $r_3 = 4.45 \text{ m}$ 。

3 组井筒地质条件及材料条件均相同,表土段长为 240 m; 井壁材料为 350 号钢筋混凝土,材料容重为 0.024 MN/m^3 ,弹性模量为 30 GPa ,泊松比为 0.21。

井筒受到的侧向土压力可以表示为

$$g(z) = -K(L - z)$$

式中 K 为侧压力系数,取 $0.011 \sim 0.013 \text{ MPa/m}$ 。

特殊地层中井筒外侧受到的竖直附加力按文献[4]模型试验结果有

$$p(z) = \begin{cases} -\beta(L - z)/H_c & (0 \leq L - z \leq H_c) \\ \alpha(L - z - H_c) + \beta & (H_c \leq L - z \leq 240) \end{cases}$$

式中 H_c 为附加力拐点参数,文献[11]中 $H_c = 50 \text{ m}$; α, β 为附加力线性分布系数,随时间变化,取模拟试验中井壁破坏时刻^[11]的数据 $\alpha = -2.45 \times 10^{-4} \text{ MPa/m}$, $\beta = 0.064 \text{ MPa}$,此时侧压力系数 $K = 0.0118$ 。

3.2 结果分析

立井 1 号与立井 3 号计算结果的对比表示的是

外壁厚度不改变而改变内壁厚度产生的影响,立井 1 号与立井 2 号计算结果的对比表示的是不改变内壁厚度而改变外壁厚度产生的影响。

图 2(a) 为 3 组立井深 230 m 处环向正应力随径向的变化曲线,从图中可以看出,仅增加内壁厚度或仅增加外壁厚度均将使得井筒内、外壁环向受压减小。内壁 σ_θ 受内外壁厚度改变的影响程度相当,而外壁 σ_θ 则受外壁厚度改变的影响程度较大。

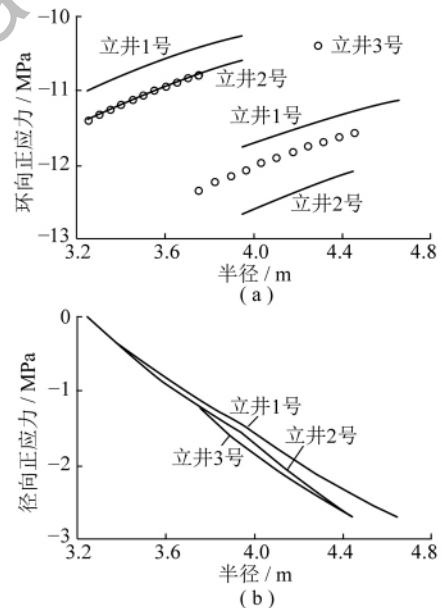


图 2 环向正应力和径向正应力对比(深 230 m)

Fig. 2 Comparison of the circular and radial normal stress(230 m depth)

图 2(b) 为 3 组立井深 230 m 处径向正应力随径向的变化曲线,从图中可以看出,仅增加内壁厚度或仅增加外壁厚度均将导致井筒(包括内外壁)径向受压减小,但其减小幅度较小。

图 3 为 3 组立井内外壁轴向正应力随深度的变化曲线,从图中可以看出,对于内壁 σ_z 而言,其受内外壁厚度改变的影响较小;增加内壁厚度对外壁 σ_z

改变较小,而增加外壁厚度则大幅度减小了外壁的轴向受压。这一结果是由于内外壁处于可滑动状态,外壁独自承担了其外侧的竖直附加力而造成的。

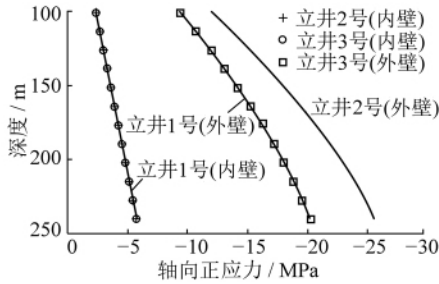


图3 轴向正应力对比

Fig. 3 Comparison of the axial normal stress

采用第四强度理论分析井筒的安全性,图4为3组立井内外壁相当应力随深度的变化曲线,从图中可以看出,仅增加内壁厚度对井筒内壁及外壁安全性的提高程度均较小;仅增加外壁厚度对井筒内壁安全性改善较小,但对于井筒薄弱环节外壁的安全性则提高十分显著。

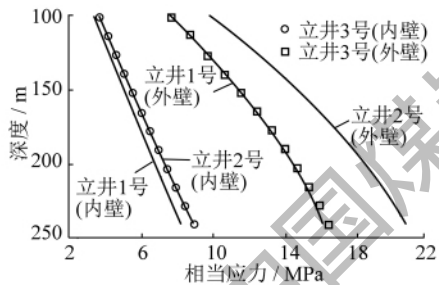


图4 相当应力对比

Fig. 4 Comparison of the equivalent stress

4 结 论

(1) 综合应用线性叠加原理、弹性通解、Fourier方法等理论获得了特殊地层中一种塑料板夹层双层井壁结构在一般荷载条件下的一组圣维南解。

(2) 通过算例分析了内壁、外壁厚度的改变对井壁环向、径向及轴向正应力的影响,并利用第四强度理论分析了立井安全性的变化,结果表明:仅增加内壁厚度对井筒内壁及外壁安全性的提高程度均较小;仅增加外壁厚度对立井内壁安全性改善较小,但对于井筒薄弱环节外壁的安全性则提高较显著。

参考文献:

[1] 杨维好. 深厚表土层中井壁垂直附加力变化规律的研究[D]. 徐州: 中国矿业大学, 1993.
Yang Weihao. The study on variation law of vertical additional force

applied to a shaft lining by soil during drainage in overburden[D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 1993.

[2] 吕恒林, 崔广心. 深厚表土中井壁破裂的力学机理[J]. 中国矿业大学学报, 1999, 28(6): 539-543.
Lü Henglin, Cui Guangxin. Mechanical mechanism of shaft lining structure fracture in thick alluvium[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 1999, 28(6): 539-543.

[3] 崔广心, 杨维好, 吕恒林. 深厚表土层中的冻结壁和井壁[M]. 北京: 中国矿业大学出版社, 1998: 131-158.
Cui Guangxin, Yang Weihao, Lü Henglin. The frozen wall and the shaft lining in thick alluvium[M]. Beijing: China University of Mining and Technology Press, 1998: 131-158.

[4] 周国庆, 程锡禄, 崔广心. 粘土层中立井井壁附加力的模拟研究[J]. 中国矿业大学学报, 1991, 20(3): 86-91.
Zhou Guoqing, Cheng Xilu, Cui Guangxin. Simulation research on additional force acting on the vertical shaft lining in clay[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 1991, 20(3): 86-91.

[5] 周国庆, 刘雨忠, 冯学武, 等. 围土注浆缓释和抑制井壁附加力效应及应用[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(7): 742-745.
Zhou Guoqing, Liu Yuzhong, Feng Xuewu, et al. Application and effect of grouting in surrounding soil on releasing and restraining additional stress of shaft lining[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(7): 742-745.

[6] 蒋斌松. 复合井壁的弹性分析[J]. 煤炭学报, 1997, 22(4): 397-401.
Jiang Binsong. Elastic analysis of the composite shaft linings[J]. Journal of China Coal Society, 1997, 22(4): 397-401.

[7] 蒋斌松. 有限长复合井壁的轴对称变形问题[J]. 工程力学, 1998, 15(4): 89-95.
Jiang Binsong. On axisymmetric deformation analysis of a finite composite shaft lining[J]. Engineering Mechanics, 1998, 15(4): 89-95.

[8] 周扬, 周国庆. 考虑治理荷载作用时井壁严格轴对称变形分析[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(7): 999-1004.
Zhou Yang, Zhou Guoqing. Strict axisymmetric deformation analysis of shaft linings considering shaft-curing load[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(7): 999-1004.

[9] 周扬, 周国庆, 梁华强. 井壁约束内壁治理方法的力学分析[J]. 中国矿业大学学报, 2009, 38(2): 197-202.
Zhou Yang, Zhou Guoqing, Liang Huaqiang. Mechanical analysis of a restricting inside lining used in the shaft-curing method[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2009, 38(2): 197-202.

[10] 王敏中. 高等弹性力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2003: 86-90.
Wang Minzhong. Advanced elasticity[M]. Beijing: Peking University Press, 2003: 86-90.

[11] 周国庆, 程锡禄. 特殊地层中的井壁应力计算问题[J]. 中国矿业大学学报, 1995, 24(4): 24-30.
Zhou Guoqing, Cheng Xilu. Study on the stress calculation of shaft lining surrounded by special strata[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 1995, 24(4): 24-30.