

文章编号: 0253 - 9993 (2005) 06 - 0809 - 04

# 子空间辨识方法在主动约束层阻尼筒形结构建模中的应用

续秀忠<sup>1</sup>, 章 艺<sup>2</sup>, 童宗鹏<sup>2</sup>, 华宏星<sup>2</sup>

(1. 上海海事大学 机械工程系, 上海 200135; 2. 上海交通大学 振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030)

**摘 要:** 通过以系统输入、输出的随机响应采样值为依据的子空间辨识方法获取系统的模态参数和空间状态方程。在辨识过程中分别根据输入、输出信号和输出信号进行辨识, 并利用实验测试数据验证模型的精度。辨识和实验结果比较表明, 此方法能够得到多自由度系统较精确的状态空间模型, 为振动控制器的设计提供了一个精确的控制模型。

**关键词:** 子空间辨识; 筒形结构; 主动约束层阻尼

**中图分类号:** TH113; TP391 **文献标识码:** A

## Application of subspace identification method in modeling of active constrained layer damping (ACLD) tubby structure

XU Xiu-zhong<sup>1</sup>, ZHANG Yi<sup>2</sup>, TONG Zong-peng<sup>2</sup>, HUA Hong-xing<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanical Engineering, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135, China; 2. State Key Laboratory of Vibration Shock &amp; Noise, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** Proposed a new method to get modal parameters and state space by subspace identification based on input and output data. The identification and experiment of a active constrained layer damping (ACLD) tubby structure was given to validate the proposed method. The results indicate that the method proposed can get an accurate state space model for controller design.

**Key words:** subspace identification; tubby structure; active constrained layer damping (ACLD)

子空间辨识方法源于线性定常系统的可观可控性理论, 具有辨识精度高和数值运算稳定等特点。这类方法于 20 世纪 90 年代初出现, 经过近 20 a 的研究和发展, 现已广泛应用于不同领域的动力学模型辨识。状态子空间系统辨识算法, 是确定多输入、多输出系统模型的有效方法之一, 特别是对于复杂的高阶系统, 比传统方法更为优越<sup>[1, 2]</sup>。与传统的方法比较, 该方法无需对系统有太多的了解, 只需要给定模型的阶次, 而且在辨识过程中可以通过非零奇异值的个数估计出模型的阶次<sup>[3, 4]</sup>。本文针对流体作用下筒形结构的控制模型辨识问题, 分别根据随机的输出信号和输入、输出信号进行了辨识。

### 1 辨识方法

离散状态空间模型描述为

$$X_{k+1} = AX_k + BU_k, Y_k = CX_k + DU_k, \quad (1)$$

收稿日期: 2005 - 09 - 21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10302019)

作者简介: 续秀忠 (1965 - ), 男, 山西定襄人, 副教授, 高级工程师。Tel: 021 - 58855200 - 2620, E - mail: xuxz\_sj@sina.com

式中, A, B, C, D 为常数矩阵,  $A \in \mathbf{R}_{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}_{n \times m}$ ,  $C \in \mathbf{R}_{l \times n}$ ,  $D \in \mathbf{R}_{l \times m}$ ;  $X_k$  为状态向量,  $X_k \in \mathbf{R}_{n \times 1}$ ;  $U_k$  为输入向量,  $U_k \in \mathbf{R}_{m \times 1}$ ;  $Y_k$  为测量输出,  $Y_k \in \mathbf{R}_{l \times 1}$ ;  $k$  为离散时间, 且  $k=0, \dots, n$  为模型阶数;  $m, l$  分别为输入、输出信号的维数.

1.1 根据输入/输出信号进行辨识

子空间辨识算法包括 3 个主要步骤: 计算输入、输出的 Hankel 矩阵的行空间投影. 典型的做法是进行 QR (LQ) 分解; 求解该投影的奇异值分解, 从而直接得到可观性矩阵  $O_i$  ( $i$  为块的行数) 和状态序列  $X_f$  的卡尔曼滤波估计  $\hat{X}_f$ ; 由可观性矩阵  $O_i$  和估计的状态序列  $\hat{X}_f$  来确定系统状态空间矩阵 A, B, C, D. 即  $Y_f/U_f W_p = O_i \hat{X}_f$ , 下标 p, f 分别代表“过去”和“将来”, 其中当数据很多时可认为  $j \rightarrow \infty$ .  $W_p$  可以表示为  $W_p \stackrel{\text{def}}{=} (Y_p^T \ U_p^T)^T$ . 由系统的状态空间方程可以推导出

$$Y_p = C X_p + H_i U_p, \quad Y_f = C X_f + H_i U_f, \quad X_f = A_i X_p + U_p.$$

$$O_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_{i \times n}$$

扩展的可控性矩阵  $H_i$  为

$$H_i = \begin{pmatrix} (A^{i-1}B \ A^{i-2}B \ \dots \ AB \ B) & (O_i \ \mathbf{R}_{n \times m}) \\ D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \dots & D \end{pmatrix} \in (\mathbf{H}_i \ \mathbf{R}_{i \times m}).$$

基于扩展可观矩阵的子空间算法, 利用 LQ 分解计算投影得  $O_i \stackrel{\text{LQ}}{=} Y_f/U_f W_p$ , 其中  $Y_f \in \mathbf{R}_{il \times j}$ ,  $U_f \in \mathbf{R}_{im \times j}$ ,  $W_p \in \mathbf{R}_{(m+l) \times j}$ ,  $O_i \in \mathbf{R}_{il \times j}$ . 计算加权 SVD, 得

$$W_1 O_i W_2 = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}.$$

由于实际中噪声和有限长度数据量的影响,  $O_i$  未必为满秩矩阵, 可用一个秩为  $N$  的矩阵的奇异值分解来近似它. 在计算奇异值分解之前, 对  $O_i$  分别用  $W_1$  和  $W_2$  进行左加权和右加权. 为了保持  $O_i$  的秩不变,  $W_1$  和  $W_2$  为满秩矩阵. 其中矩阵  $W_1 \in \mathbf{R}_{il \times il}$ ,  $W_2 \in \mathbf{R}_{j \times j}$ ,  $U_1 \in \mathbf{R}_{il \times n}$ ,  $U_2 \in \mathbf{R}_{il \times (il-n)}$ ,  $S_1 \in \mathbf{R}_{n \times n}$ ,  $V_1 \in \mathbf{R}_{n \times n}$  和  $V_2 \in \mathbf{R}_{j \times (j-n)}$ ,  $n$  为阶次. 通过 SVD 奇异值分解, 得到系统的主奇异值矩阵  $S_1$ , 从而得到系统的阶次, 并确定  $U_1$  和  $V_1$ . 扩展可观矩阵  $O_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2}$ ,  $O_i = U_2^T W_1$ , 其中  $O_i \in \mathbf{R}_{il \times j}$ ,  $O_i \in \mathbf{R}_{(il-n) \times il}$ . 根据  $O_i$  确定 A 和 C.

$A = \underline{O}_i^{-1} \underline{O}_i = \underline{O}_i (1 \text{ end} - l) \underline{O}_i^{-1} (l+1 \text{ end} \ ) \in (\mathbf{A} \ \mathbf{R}_{j \times j})$ ,  $C = \underline{O}_i (1 \ l) \in \mathbf{R}_{l \times j}$ . 确定系统矩阵 B 和 D.

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \dots & L_{i-1} & L_i \\ L_2 & L_3 & \dots & L_i & 0 \\ L_3 & L_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_i & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix},$$

$$(M_1 \ M_2 \ \dots \ M_j) = \underline{O}_i Y_f U_f^T, \quad L = (L_1 \ L_2 \ \dots \ L_i) = \underline{O}_i.$$

## 1.2 根据输出信号进行辨识<sup>[5]</sup>

在实际工程中, 往往较难获取全部输入信号 (如多台设备同时工作或外部海况激励), 只能根据获得的输出信号确定系统的特性. 根据系统的输出和状态的二阶统计量 (自相关/互相关) 得到系统的 Hankel 矩阵, 系统的自相关/互相关为

$$Q = E[X_{k+1} Y_k^T], R_i = E[Y_{k+1} Y_k^T]. \quad (2)$$

将方程 (2) 代入方程 (1) 可以得到

$$R_i = E[Y_{k+1} Y_k^T] = CA^{i-1}Q. \quad (3)$$

定义由  $R_i$  所构成的 Hankel 矩阵分别为

$$H = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_q \\ R_2 & R_3 & \dots & R_{q+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_p & R_{p+1} & \dots & R_{p+q-1} \end{bmatrix}.$$

由方程 (3) 可以得到

$$H = \begin{bmatrix} CQ & CAQ & \dots & CA^{q-1}Q \\ CAQ & CA^2Q & \dots & CA^qQ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{p-1}Q & CA^pQ & \dots & CA^{p+q-2}Q \end{bmatrix}. \quad (4)$$

对方程 (4) 进行奇异值分解得到

$$H = USV^T = (U_1 \ U_2) \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}.$$

其中,  $S_1 \gg S_2$ . Hankel 矩阵的估计值  $\hat{H} = U_1 S_1 V_1^T = (U_1 S_1^{0.5}) (S_1^{0.5} V_1^T) = \hat{U} \hat{Q}$ .

根据 Hankel 矩阵可以得到系统矩阵  $A$  和输出矩阵  $C$ , 即

$$A = \underline{\underline{U}}_i^{-1} \underline{\underline{U}}_{i+1} = \underline{\underline{U}}_i (1 \ \text{end} - l) \underline{\underline{U}}_{i+1}^{-1} (l+1 \ \text{end}), \quad C = \underline{\underline{U}}_i (1 \ l).$$

其中,  $\underline{\underline{U}}_i$  由  $\underline{\underline{U}}$  的第  $1 \sim (\text{end} - l)$  行组成, 且  $(\text{end} - l)$  大于  $\underline{\underline{U}}$  的列数;  $\underline{\underline{U}}_i^{-1}$  表示矩阵的广义逆. 由  $A$  的特征根  $\{ \lambda_j \}$  可以估计特征频率  $f_j = |f_s \ln(\lambda_j)|$ ,  $f_s$  为信号采样频率.

## 2 算 例

图 1 为实验模型, 1~6 处各点分别粘贴主动约束层阻尼 (ACLD). 实验中采用单点激励和多点测试振动加速度的测试方法, 对位置 5 处的压电材料进行激励, 分别测试 1~3 点的频率响应曲线. 图 2 为在位置 5 处激励时, 测点 1~3 的实测和基于系统输入/输出信号的子空间方法辨识得到的加速度频率响应和相位. 通过辨识获得的频率响应曲线与实测曲线幅值、峰值所对应的频率和变化趋势均能较好地重合, 特别是在能量较高的高频段, 其拟合效果更好. 在能量较低的 100 Hz 以下频段出现一些频率遗漏.

在 150~500 Hz 范围内原点的相位滞后小于  $180^\circ$ ; 测点 1, 2 的相位滞后均远大于  $180^\circ$ . 相位辨识结果显示, 采用子空间辨识方法可以较好地拟合相位结果. 通过图 2 的比较结果可以看出, 子空间辨识方法具有较高的辨识精度, 经辨识后的模型完全可以用于主动控制系统的设计.

图 3 为实验获得的加速度频率响应曲线和根据系统输出信号获取的系统特征值, 特征值稳定图中纵坐标为 Hankel 矩阵行数变化量 (通过调整 Hankel 矩阵行数, 可以增加或减少用于辨识的输出信号的数据量). 加速度频率响应曲线显示系统的振动加速度响应能量主要集中在高频段. 通过增加 Hankel 矩阵行数可以提高辨识的精度, 但过多增加 Hankel 矩阵行数会增加计算工作量, 系统特征值稳定图显示, 当 Han

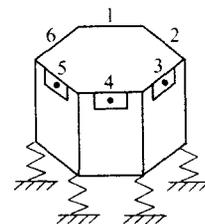


图 1 实验模型

Fig. 1 Experiment model

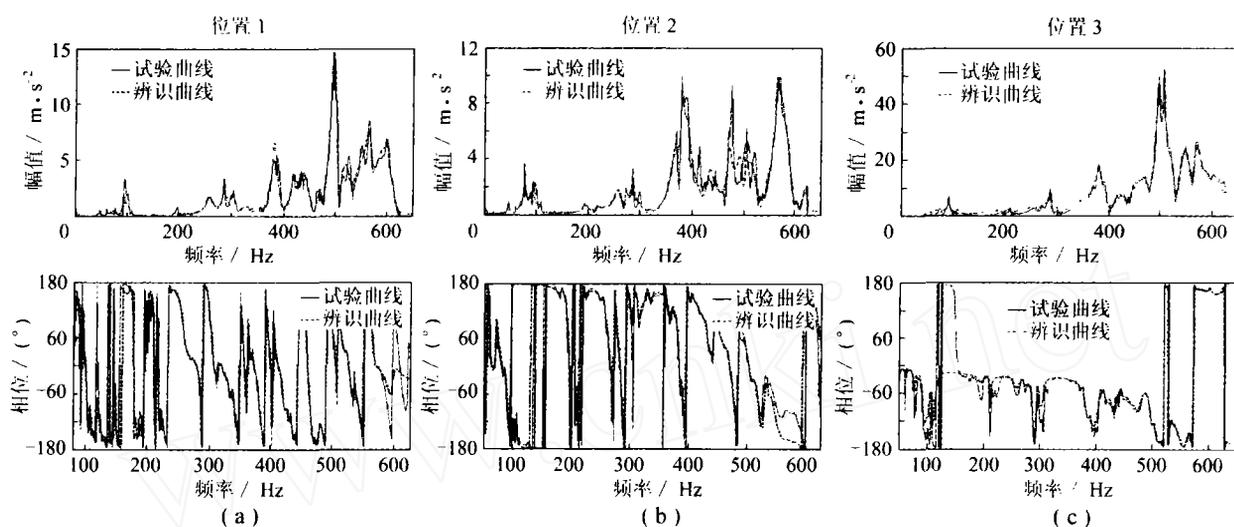


图2 频率响应曲线

Fig. 2 Frequency response curves

kle矩阵行数增加到一定值后, 频率辨识结果达到稳定. 在高频段线谱的稳定性较强, 能较好地同实测的加速度频率响应曲线峰值相吻合, 说明采用基于系统输出信号的状态子空间辨识方法同样可以较好地对结构的固有特性进行辨识.

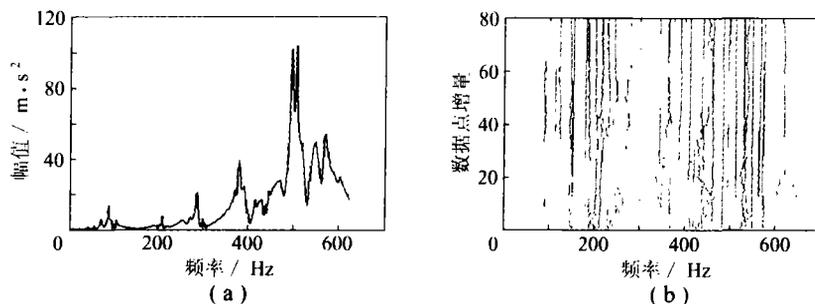


图3 实验加速度频率响应 (a) 和系统特征值稳定图 (b)

Fig. 3 Acceleration frequency response and stabilization diagram

### 3 结 语

以一个 ACLD 筒形结构原型对子空间辨识方法进行了阐述, 并分别利用输出信号和输入/输出信号对 ACLD 筒形结构进行了辨识. 实验结果证明, 子空间辨识方法具有较高的辨识精度, 经辨识后的模型完全可以用于主动控制系统的设计.

#### 参考文献:

- [1] Overschee P V, B D Moor. Subspace identification for linear systems: theory implementation applications [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [2] Overschee P V, B D Moor. Subspace algorithms for the stochastic identification problem [J]. Automatica, 1994, 30 (1): 75 ~ 93.
- [3] 潘立登, 潘仰东. 系统辨识与建模 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2003.
- [4] 史东锋, 郑敏, 申凡. 工程结构工作模态的子空间辨识方法 [J]. 振动工程学报, 2000, 13 (3): 406 ~ 412.
- [5] Zhang Y, Zhang Z Y. Modal parameter identification using response data only [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 282: 367 ~ 380.